Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Tratamento Matemático das Observações

Ano de 2002/03 | Folha 1

1. Consideremos $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos que pretendemos calcular $p(\overline{x})$. Ao usar $p_n(\overline{x}) = a_n\overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{x} + a_0$ efectuamos n adições/subtracções e $2n-1$ multiplicações/divisões. No entanto, se considerarmos

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x))),$$

designada por forma encaixada do polinómio, ao calcular $p(\overline{x})$ só efectuamos n adições/subtracções e n multiplicações/divisões. Esta forma é a base do chamado método (ou algoritmo) de Horner, que consiste formalmente nas seguintes operações: $p \leftarrow a_n$; $p \leftarrow p\overline{x} + a_i$, $i = n-1(-1)0$, sendo $p_n(\overline{x}) = p$.

   (a) Demonstre a chamada regra de Ruffini: *O valor numérico de $p_n(\overline{x})$ de um polinómio p_n em $\overline{x}$ é igual ao resto da divisão de $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$.*

   (b) Dividindo $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$ obtém-se $p_n(x) = (x - \overline{x})q_{n-1}(x) + r$, onde q_{n-1} é um polinómio de grau inferior ou igual a $n-1$ e r uma constante. Usando o algoritmo de Horner construa um algoritmo que permita determinar r e os coeficientes de q_{n-1} (algoritmo de Ruffini).

   (c) Calcule o valor de $p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 12$ em $\overline{x} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

   (d) Quais as soluções inteiras de um polinómio de grau n de coeficientes inteiros?

2. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathbb{R}^n$.

   (a) Norma 1: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

   (b) Norma 2 ou norma euclidiana: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

   (c) Norma infinito, norma máxima ou norma de Chebyshev: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

3. Seja $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

   (a) Mostre que esta relação define uma norma matricial a partir de uma norma vectorial.

   (b) Para a norma matricial assim definida, prove que $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

4. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e que são induzidas pelas normas vectoriais homónimas.

   (a) Norma 1: $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

   (b) Norma infinito ou norma de Chebyshev: $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

5. Seja A uma matriz real, não singular e de ordem n. Prove que se λ é um valor próprio de A então

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \|A\|.$$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$.

7. Ao resolver o sistema de equações lineares $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, encontrando-se afectado de um erro δb. Qual o erro que vem para x resultante dessa inexactidão?

8. O número de condição de uma matriz A é definido por $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

   (a) Mostre que uma medida do número de condição pode ser dada por λ_M/λ_m, onde λ_M e λ_m são, respectivamente, o maior e menor (em módulo) valores próprios de A.

   (b) Mostre que se A é singular $\text{cond}(A)$ é infinito e se A é não singular $\text{cond}(A) \geq 1$.

9. As matrizes dos sistemas $\begin{cases} x - y & = & 1 \\ x - 1.00001y & = & 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y & = & 1 \\ x - 0.99999y & = & 0 \end{cases}$ são aproximadamente iguais. Determine e compare as suas soluções.

10. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a,b]$.

    (a) Norma L_2: $\quad \forall f \in C[a,b], \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2}$.

    (b) Norma de Chebyshev: $\quad \forall f \in C[a,b], \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

11. Durante a sedimentação da reacção de saponificação entre quantidades equimolares de hidróxido de sódio e acetato de etilo, a concentração c (g mole/litro) de cada reagente varia com o tempo t (min) de acordo com a equação $1/c = 1/c_0 + kt$, onde c_0 é a concentração inicial e k (litro/g mole min) é a constante de reacção. Foram obtidos os seguintes resultados em laboratório à temperatura de $77^o\ F$:

t	1	2	3	4	5	7	10	12	20	25
$1/c$	24.7	32.4	38.4	45.0	52.3	65.6	87.6	102	154	192

    (a) Obtenha uma estimativa para a concentração inicial.

    (b) Obtenha uma estimativa para a concentração ao fim de 15 minutos e compare-a com a solução obtida em laboratório (ao fim de 15 minutos obteve-se $1/c = 135$).

12. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ um conjunto de $n+1$ pontos distintos no intervalo real $[a,b]$ e $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Prove que se x pertence ao intervalo definido pelos pontos dados, então

$$\|w(x)\|_\infty \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}, \qquad h = \max_{0\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

13. Pretende-se construir uma tabela para a função $f(x) = e^x$, com $x \in [0,1]$. Considere o valor de e com 5 casas decimais correctas e uma partição com pontos igualmente distanciados. Determine o diâmetro da partição a considerar de modo que o polinómio interpolador de Lagrange permita obter uma aproximação para f com um erro inferior a 10^{-6}.

14. Considere a função $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in [1,3]$. Determine o polinómio interpolador de Lagrange que aproxima f em $[1,3]$ com um erro inferior a 10^{-2}.

15. Determine uma aproximação para o instante na da passagem do perigeu da Lua em Março, 1999, a partir dos valores tabelados para as zero horas de cada dia; indique também a distância (em raios médios da Terra) da Terra à Lua nesse instante.

dia	19	20	21
distância	57.071	56.955	57.059

16. Determine uma aproximação para a declinação aparente de Vénus para o dia 8 de Maio de 1999, às 18h30m45s, por interpolação cúbica a partir das Efemérides Astronómicas (onde está tabelada para cada dia, às zero horas)

dia	7	8	9	10
δ_i	$+5^o51'47''.55$	$+6^o22'25''.20$	$+6^o52'54''.57$	$+6^o23'14''.96$