1. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear para a função f tal que

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	1.25	1	1.5	1

.

2. Calcule o polinómio interpolador de Lagrange segmentado quadrático para a função do exercício anterior.

3. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear para uma função f supondo que esta é conhecida nos pontos

$$a = x_0 < x_{1/3} < x_{2/3} < x_1 < x_{4/3} < x_{5/3} < x_2 = b.$$

4. Particularize o resultado do exercício anterior para a função $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ e aproxime $cos(20^o)$; indique um majorante para o erro cometido.

5. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado de grau 2 para uma função f que se conhece nos pontos

$$a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2 < x_{5/2} < x_3 = b.$$

6. Particularize o exercício anterior para

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

7. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado cúbico para uma função f supondo que esta é conhecida nos pontos

$$a = x_0 < x_{1/3} < x_{2/3} < x_1 < x_{4/3} < x_{5/3} < x_2 = b.$$

8. Particularize o resultado do exercício anterior para a função $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$.

9. Mostre que o polinómio de Hermite de grau mínimo de uma função $f \in C^4[x_0, x_1]$ é dado por

$$h_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

e deduza que o erro satisfaz a

$$\|f - h_3\|_\infty \leq \frac{(x_1 - x_0)^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

10. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \sin x$ quando se considera $x \in [0, \pi/2]$.

11. Determine, de dois modos distintos, o polinómio interpolador de Hermite para os dados

x_i	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.75	1	0.25
$f'(x_i)$	0.25	0.5	0.75

.

12. Considere a função $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$. Determine uma aproximação para $f(1.03)$ usando o polinómio interpolador de Hermite considerando os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1.05$. Determine uma estimativa para o erro cometido.

13. (a) Seja f uma função definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e suponha que f e a sua derivada f' são conhecidas nos pontos da partição $\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$.
    Mostre que o polinómio de Hermite é o único polinómio de grau menor ou igual a $2n + 1$ interpolador de f e f' nos pontos de Δ.

    (b) Seja h_{2n+1} o polinómio de Hermite de grau menor ou igual a $2n + 1$ interpolador de f e da sua derivada nos pontos da partição Δ dada na alínea anterior. Se $f \in C^{2n+2}([a, b])$ então, prove que, para todo $\overline{x}$, existe um $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(\overline{x}) - h_{2n+1}(\overline{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} w^2(\overline{x}), \qquad \text{com} \quad w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Nota: Considere a função $F(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) - \left(\frac{w(x)}{w(\overline{x})}\right)^2 [f(\overline{x}) - h_{2n+1}(\overline{x})]$.

14. Determine o polinómio de grau mínimo que faça a concordância entre a recta

$$y = -2 + \frac{1}{2}(8 - x), \qquad \text{no ponto} \quad (8, -2),$$

e a circunferência

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1, \qquad \text{no ponto} \quad (1, -1).$$

Nota: Duas curvas dizem-se concordantes de tiverem a mesma tangente no ponto de união.

15. Considere $f(x) = e^x$. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 5 – h_5 – usando os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Compare $h_5(0.25)$ com $f(0.25)$ e com $p_2(0.25)$ em que p_2 é o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2, para a função f, determinado nos mesmos pontos.

16. Mostre que o polinómio de Taylor de grau m de uma função f em torno do ponto $x = x_0$ oscula m vezes com f o ponto x_0.

17. Considere as funções f e g das quais se conhecem os valores

x_i	0	1
$f(x_i)$	-1	0
$f'(x_i)$	-2	10
$f''(x_i)$		40

,

x_i	0	0.25
$g(x_i)$	0.75	1
$g'(x_i)$	0.25	0.5
$g''(x_i)$	0.25	0.5

.

    (a) Determine o polinómio p que oscula com f duas vezes o ponto $x_0 = 0$ e três vezes o ponto $x_1 = 1$.
    (b) Determine o polinómio p que oscula com g duas vezes os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.25$.

18. Determine o polinómio interpolador de Hermite segmentado cúbico de f sabendo que

x_i	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.5	1	0.5
$f'(x_i)$	0.5	0	-0.5

.

19. Suponha que conhece uma função e a sua derivada nos pontos

$$x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2.$$

Determine o polinómio interpolador de Hermite segmentado de grau 5 de dois modos distintos.

20. Particularize o exercício anterior para a função $f(x) = \cos x$ considerando os pontos

$$x_0 = 0, \qquad x_{1/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_{3/2} = \frac{5\pi}{4}, \qquad x_2 = \pi.$$