

1. Seja  $X$  uma v.a. que toma os valores  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$  e tal que  $P(X = x_i) = \frac{i}{40}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , e  $P(X = x_i) = \frac{i-1}{40}$ ,  $i = 5, 6, 7, 8, 9$ .

- (a) Determine as funções de probabilidade e de repartição da v.a. e esboce os seus gráficos.  
(b) Calcule  $P(X \leq x_4)$  e  $P(X > x_4)$ .

2. Um determinado estabelecimento comercial tem capacidade de vender entre zero e quatro teodolitos num mês. Seja  $X$  a v.a. que indica o número de teodolitos vendidos num mês e

$k$	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

- (a) Determine a função de distribuição da v.a.  $X$ .  
(b) Qual probabilidade do estabelecimento vender entre 1 e 3 teodolitos num mês?

3. (a) Determine  $k$  de modo que a função  $f$  seja uma função densidade, com

$$f(x) = \begin{cases} k(-x^2 + 5x - 4), & x \in [1, 4], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (b) Seja  $X$  a v.a. que tem por função densidade a função  $f$  com o valor de  $k$  encontrado na alínea anterior. Determine a sua função de distribuição e calcule  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X > 2)$  e  $P(1 < X \leq 2)$ .

4. Considere a v.a.  $X$  e admita que a sua função de distribuição é  $F(x) = \begin{cases} [2 + (x - 1)^2]^{-1}, & x < 1, \\ 1 - [3 + (x - 1)]^{-1}, & x \geq 1. \end{cases}$

- (a) Esboce o gráfico de  $F$ .  
(b) Calcule  $P(X = 1)$ ,  $P(0.5 < X < 1)$ ,  $P(-1 < X \leq 1)$ ,  $P(0 \leq X < 2)$  e  $P(1 \leq X \leq 2)$ .

5. A duração, em milhares de horas, da componente de um tipo de radar, é uma v.a.  $X$  com função densidade  $f$  tal que  $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ , se  $x > 0$ , e  $f(x) = 0$ , caso contrário. Pretende-se determinar a probabilidade para que uma componente escolhida ao acaso: dure menos de  $4 \times 10^3$  horas; dure entre  $5 \times 10^3$  e  $10 \times 10^3$  horas; dure mais de  $15 \times 10^3$  horas.

6. Seja  $X$  uma v.a. com função de distribuição  $F_x$  e consideremos uma função  $g$ , real de variável real. Admita-se que  $Y = g(X)$ , que assume o valor  $y = g(y)$  quando  $X = x$ , é também uma v.a.. Determine a função de distribuição  $F_y$  da v.a.  $Y$  sendo a função  $g$  dada por:

- (a)  $g(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ; (b)  $g(x) = x^2$ .

7. Seja  $X$  uma v.a. discreta com função de probabilidade  $f_x$  e consideremos uma função  $g$ , real de variável real. Admita-se que  $Y = g(X)$ , que assume o valor  $y = g(y)$  quando  $X = x$ , é também uma v.a. discreta. Determine a função de probabilidade  $f_y$  da v.a.  $Y$  sendo:

(a)  $\frac{x_i}{f_x(x_i)} \left| \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \text{outro } x \\ 1/15 & 1/4 & 1/6 & 1/10 & 17/60 & 0 \end{array} \right.$  e  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ ;

(b)  $f_x(x) = \begin{cases} \frac{e^{-k} k^x}{x!}, & k \in \mathbb{R}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{outro } x \end{cases}$  e  $g(x) = x^2 + 3$ .

8. Determine, caso exista, o valor esperado da v.a.  $X$  que:

- (a) representa o número de pontos obtidos por um dado regular;
- (b) assume os valores  $x_i = (-1)^i 2^i / i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , com função de probabilidade  $f(x_i) = 1/2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

9. Seja  $X$  a v.a. com função densidade  $f$  tal que  $f(x) = 2/x^3$ , se  $x > 1$ , e  $f(x) = 0$ , caso contrário. Determine, se possível, os seus momentos de primeira e segunda ordem.

10. Seja  $(X, Y)$  uma v.a. cuja função de probabilidade é dada na tabela

$x$	$y$	2	4
1		0.2	0.3
2		0.1	0.1
3		0.2	0.1

- (a) Determine a função de distribuição da v.a.  $(X, Y)$ .
- (b) Calcule  $P(X \leq 3, Y \leq 4)$ ,  $P(X \leq 3, 2 < Y \leq 4)$  e  $P(1 < X \leq 3, 2 < Y \leq 4)$ .

11. Seja  $(X, Y)$  uma v.a. que tem por função densidade

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine a função de distribuição da v.a.  $(X, Y)$ .
- (b) Calcule  $P(X \leq 3, Y \leq 4)$ ,  $P(X \leq 3, 2 < Y \leq 4)$  e  $P(1 < X \leq 3, 2 < Y \leq 4)$ .

12. Seja  $(X, Y)$  uma v.a. cuja função de probabilidade é dada na tabela

$x$	$y$	0	1
0		$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$
1		$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

- (a) Determine a função de probabilidade das distribuições marginais de  $X$  e  $Y$ .
- (b) Determine a função de distribuição marginal de  $X$  e  $Y$ .

13. Vai ser atribuído a uma família, através de um sorteio, um apartamento num edifício com três andares, havendo dois tipos de apartamentos em cada andar (tipo  $A$  e  $B$ ). Pretendendo o dono do edifício que a referida família fique, de preferência, com um no primeiro andar e do tipo  $A$ , viciou o sorteio de modo que a função probabilidade fosse a seguinte:

	1º andar	2º andar	3º andar
apartamento do tipo $A$	$\frac{20}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
apartamento do tipo $B$	$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

- (a) Determine as distribuições marginais das variáveis em questão.
- (b) Qual é a probabilidade de sair um apartamento do tipo  $A$ ? E qual é a probabilidade de sair o primeiro andar?
- (c) Diga se as variáveis são dependentes ou independentes.

14. Considere a v.a.  $(X, Y)$  que tem por função densidade  $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

- (a) Determine a esperança do vector aleatório  $(X, Y)$ .
- (b) Determine  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ ,  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_{X,Y}$ .
- (c) Diga se v.a.  $X$  e  $Y$  são ou não independentes.