1. Estabeleça um modelo funcional que permita determinar:

   (a) a área de um triângulo onde se mediram um dos lados e os seus ângulos internos;

   (b) a área de um trapézio rectângulo onde se mediram todos os seus lados;

   (c) a passagem de coordenadas polares (ρ, θ) para coordenadas cartesianas (x, y), em que o polo coincide com a origem do sistema de referência cartesiano;

   (d) a passagem das coordenadas cartesinas em $\mathbb{R}^3$ relativamente a um sistema de referência (O, i, j, k) para as coordenadas relativas ao sistema (O, i', j', k), em que i' e j' se obtêm de i e j, respectivamente, por uma rotação de um ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;

   (e) a passagem das coordenadas cartesinas em $\mathbb{R}^3$ relativamente a um sistema de referência (O, i, j, k) para as coordenadas relativas ao sistema (O', i', j', k), em que i' e j' se obtêm de i e j, respectivamente, por uma rotação de um ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e O' se obtém de O por uma translacção definida pelo vector de coordenadas (p, q, r).

2. Seja X uma variável aleatória (v.a.) que toma os valores $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ e tal que

i	2	4	6	8	10	12	14
$P(X = i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

   (a) Determine as funções de probabilidade e de repartição da v.a. e esboce os seus gráficos.

   (b) Calcule $P(X \leq 6)$ e $P(4 < X \leq 12)$.

3. Seja X uma v.a. que toma os valores $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ e tal que

$$P(X = x_i) = \frac{i}{40}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \qquad P(X = x_i) = \frac{i-1}{40}, \quad i = 5, 6, 7, 8, 9.$$

   (a) Determine as funções de probabilidade e de repartição da v.a. e esboce os seus gráficos.

   (b) Calcule $P(X \leq x_4)$ e $P(X > x_4)$.

4. Um determinado estabelecimento comercial tem capacidade de vender entre zero e quatro teodolitos num mês. Seja X a v.a. que indica o número de teodolitos vendidos num mês e

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

   (a) Determine a função de distribuição da v.a. X.

   (b) Qual probabilidade do estabelecimento vender entre 1 e 3 teodolitos num mês?

5. (a) Determine k de modo que a função f seja uma função densidade, com

$$f(x) = \begin{cases} k(-x^2 + 5x - 4), & x \in [1, 4], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (b) Seja X a v.a. que tem por função densidade a função f com o valor de k encontrado na alínea anterior. Determine a sua função de distribuição e calcule $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$ e $P(1 < X \leq 2)$.

6. Calcule $P(X \leq -1.2)$, $P(X \leq 1)$ e $P(1.5 < X \leq 3)$, onde X é v.a. que tem por função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

7. Considere a v.a. X e admita que a sua função de distribuição é $F(x) = \begin{cases} [2+(x-1)^2]^{-1}, & x < 1, \\ 1-[3+(x-1)]^{-1}, & x \geq 1. \end{cases}$

   (a) Esboce o gráfico de F.

   (b) Calcule $P(X=1)$, $P(0.5 < X < 1)$, $P(-1 < X \leq 1)$, $P(0 \leq X < 2)$ e $P(1 \leq X \leq 2)$.

8. A duração, em milhares de horas, da componente de um tipo de radar, é uma v.a. X com função densidade f tal que $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$, se $x > 0$, e $f(x) = 0$, caso contrário. Pretende-se determinar a probabilidade para que uma componente escolhida ao acaso: dure menos de 4×10^3 horas; dure entre 5×10^3 e 10×10^3 horas; dure mais de 15×10^3 horas.

9. Seja X uma v.a. com função de distribuição F_x e consideremos uma função g, real de variável real. Admita-se que $Y = g(X)$, que assume o valor $y = g(y)$ quando $X = x$, é também uma v.a.. Determine a função de distribuição F_y da v.a. Y sendo a função g dada por:

   (a) $g(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$; (b) $g(x) = x^2$.

10. Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade f_x e consideremos uma função g, real de variável real. Admita-se que $Y = g(X)$, que assume o valor $y = g(y)$ quando $X = x$, é também uma v.a. discreta. Determine a função de probabilidade f_y da v.a. Y sendo:

    (a)

x_i	-2	-1	0	1	2	outro x
$f_x(x_i)$	1/15	1/4	1/6	1/10	17/60	0

    e $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$;

    (b) $f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-k}k^x}{x!}, & k \in \mathbb{R}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{outro } x \end{cases}$ e $g(x) = x^2 + 3$.

11. Determine, caso exista, o valor esperado da v.a. X que:

    (a) representa o número de pontos obtidos por um dado regular;

    (b) assume os valores $x_i = (-1)^i 2^i / i$, $i = 1, 2, \ldots$, com função de probabilidade $f(x_i) = 1/2^i$, $i = 1, 2, \ldots$.

12. Sendo X a v.a. definida no exercício 2, determine o seu valor mais provável, a sua variância, o seu momento de segunda ordem e o seu momento de terceira ordem centrado.

13. Seja X uma v.a. com função de probabilidade

x	0	1	2	3	outro x
$f(x)$	0.512	0.384	0.096	0.008	0

    (a) Determine a função de distribuição da v.a. X.

    (b) Calcule $P(X > 1)$, $P(X \leq 2)$ e $P(1 < X \leq 4)$.

    (c) Determine a esperança e a variância da v.a. X.

14. Seja X a v.a. com função densidade f tal que $f(x) = 2/x^3$, se $x > 1$, e $f(x) = 0$, caso contrário. Determine, se possível, os seus momentos de primeira e segunda ordem.

15. Determine, se possível, o valor esperado da v.a. X com função densidade f dada por:

    (a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$; (c) $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.