Adérito Luís Martins Araújo
José Augusto Mendes Ferreira

Tratamento Matemático das Observações

Engenharia Geográfica

F.C.T.U.C.
2003

Notas destinadas aos alunos de
Tramamento Matemático das Observações,
disciplina do curso de Engenharia Geográfica
da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade de Coimbra.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Para modelar um fenómeno natural, social ou outro, é necessário percorrer um conjunto de tarefas bem definidas: recolher os dados; compreender como é que o fenómeno em estudo interage com o "resto do mundo"; escrever, em termos matemáticos, um sistema de leis que descrevam o comportamento que desejamos compreender.

No entanto, este procedimento ainda está longe de estar completo. O estabelecimento, puro e simples, das leis que descrevem o modelo não garante que estas possam ser usadas para descrever ou prever o fenómeno físico. Uma vez construído o modelo temos que o sujeitar a um considerado "fogo cruzado" de análise matemática (testar o modelo).

Passado este passo, e tendo já uma grande dose de confiança em relação ao modelo, o objectivo a ter em conta será encontrar a sua solução exacta ou, pelo menos, ter uma ideia bastante precisa em relação a essa solução. Apesar da análise matemática fornecer importantes informações qualitativas a respeito da solução, esta falha redondamente, na maioria dos casos, na resposta ao nosso objectivo. O próximo passo é pois a obtenção de um método numérico que permita construir uma solução aproximada para o problema. Um método numérico, nestas condições, é traduzido por um algoritmo que não é mais do que um completo e não ambíguo conjunto de passos que conduzem à solução do problema.

1.2 Erro absoluto e erro relativo

A introdução de erros num determinado processo de cálculo pode ter várias causas. É nosso objectivo analisar quais são essas causas e estudar mecanismos que nos permitam determinar limites superiores para os erros obtidos no final do processo de cálculo.

Para iniciar o nosso estudo, definamos dois tipos fundamentais de erros.

Definição 1.1 (Erro absoluto) *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vector cujas componentes são desconhecidas e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ um vector cujas componentes são aproximações para as componentes correspondentes de x. Chama-se* erro absoluto *de $\overline{x}$ e representa-se por $e(\overline{x})$ a quantidade*

$$e(\overline{x}) = x - \overline{x}.$$

Na prática o valor do erro absoluto usa-se, geralmente, em norma pois, para a maioria dos problemas, não é relevante saber se o erro foi cometido por defeito ou por excesso. Vamos, então introduzir o conceito de norma vectorial.

Definição 1.2 (Norma) *Seja E um espaço vectorial (real ou complexo). A aplicação $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica*

1. $\forall x \in E, \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*, $\qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

3. $\forall x, y \in E, \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$

é designada por norma*.*

Como consequência da propriedade 3 da definição anterior temos

$$\|u\| = \|u - v + v\| \leqslant \|u - v\| + \|v\|$$

e portanto $\|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\|$. Logo vale a seguinte propriedade.

Teorema 1.3 *Seja E um espaço vectorial e $\|.\|$ uma norma em E. Então*

$$|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|, \forall u, v \in E.$$

Existem várias funções que verificam as três propriedades das normas vectoriais. Entre elas destacam-se as dadas no Exercício 1.5.2.

Definição 1.4 (Erro relativo) *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vector cujas componentes são desconhecidas e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ um vector cujas componentes são aproximações para as componentes correspondentes de x. Chama-se* erro relativo *de $\overline{x}$ e representa-se por $r(\overline{x})$ a quantidade*

$$r(\overline{x}) = e(\overline{x})/\|x\|.$$

Como na definição de erro relativo o valor de x não é conhecido, é usual considerar a aproximação $\|r(\overline{x})\| \approx \|e(\overline{x})\|/\|\overline{x}\|$. Melhor ainda, atendendo a que

$$\|x\| \geqslant |\|\overline{x}\| - \|e(\overline{x})\||,$$

podemos considerar o majorante

$$\|r(\overline{x})\| \leqslant \frac{\|e(\overline{x})\|}{|\|\overline{x}\| - \|e(\overline{x})\||}.$$

Observação 1.5 *O erro relativo, atendendo a que é uma quantidade adimensionada, é muitas vezes representado sob a forma de percentagem. Note-se também que o erro relativo nos dá uma maior informação quanto à precisão da aproximação que o erro absoluto.*

É com base nas definições de erro absoluto e erro relativo que iremos analisar os resultados numéricos que aparecerão como aproximações a valores que não conhecemos com exactidão.

1.3 Condicionamento de matrizes

Consideremos um sistema possível e determinado $Ax = b$ e seja $\overline{b}$ o vector obtido a partir de b considerando perturbações numéricas nas suas componentes. Esta situação é frequente quando o vector dos termos independentes representa medições. Para analisar de que forma as perturbações dos termos independdentes influenciam o resultado numérico, há necessidade de introduzir o conceito de norma de uma matriz.

Uma vez que o conjunto das matrizes reais de ordem n, que designaremos por $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, é um espaço vectorial, poderemos definir normas nesse espaço.

Definição 1.6 (Norma matricial) *Consideremos $\|.\|$ uma norma definida em $\mathbb{R}^n$. Então a aplicação $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que, para todo o $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

é designada norma de uma matriz subordinada à norma vectorial $\|.\|$.

Podemos definir normas matriciais subordinadas às diferentes normas vectoriais dadas no Exercício 1.5.2. Consideremos a norma $\|.\|_1$ para $\mathbb{R}^n$. Então, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\|x\|_1$$

e portanto, concluímos

$$\|A\|_1 \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Temos então que (o máximo é atingido para um vector $x \in \mathbb{R}^n$ escolhido de forma conveniente)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

o que mostra que a norma anterior é subordinada à norma $\|.\|_1$.

Consideremos agora em $\mathbb{R}^n$ a norma $\|.\|_\infty$ e seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty.$$

Atendendo a que

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \leqslant (\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|) \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

vem

$$\|A\|_\infty \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Atendendo a que o máximo é atingido para um vector $x \in \mathbb{R}^n$ escolhido de forma conveniente concluímos que a norma $\|A\|_\infty$ é subordinada à norma vectorial $\|.\|_\infty$.

Provemos agora alguns resultados importantes referentes a normas matriciais.

Teorema 1.7 *Seja $\|.\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Então, para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em que $\|A\|$ é a norma de A subordinada à norma $\|.\|$.

Demonstração: Notamos que se a norma $\|.\|$ é subordinada a uma norma vectorial então, para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, temos

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,$$

e portanto é válido o resultado. □

Teorema 1.8 *Para $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.*

Demonstração: Atendendo à desigualdade demonstrada no teorema anterior, temos

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leqslant \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\|B\|. \quad \square$$

Consideremos, de novo, o sistema possível e determinado $Ax = b$ e o vector $\overline{b}$ obtido a partir de b considerando perturbações numéricas nas suas componentes. Seja $e(\overline{b})$ e $r(\overline{b})$ respectivamente os erros absoluto e relativo de $\overline{b}$. Vejamos de que modo este erros influenciam os erros absoluto e relativo de $\overline{x}$, sendo $\overline{x}$ a solução do sistema $A\overline{x} = \overline{b}$.

Se o sistema $Ax = b$ é possível e determinado, então A é invertível e portanto $x = A^{-1}b$. Consideremos agora o sistema em que o vector dos termos independentes tem as componentes afectadas de erro, i.e, $A\overline{x} = \overline{b}$. Temos

$$r(x) = \frac{\|e(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}(b - \overline{b})\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}e(b)\|}{\|x\|}.$$

Mas

$$\|b\| = \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$$

e portanto

$$\|x\| \geqslant \|A\|^{-1}\|b\|.$$

Utilizando esta desigualdade em $r(x)$, deduzimos

$$\|r(x)\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|e(b)\|}{\|A\|^{-1}\|b\|} = \|A^{-1}\|\|A\|\|r(b)\|.$$

Esta desigualdade permite determinar uma condição suficiente para garantir que pequenas variações nas componentes do vector dos termos independentes do sistema conduz a pequenas variações nas componentes do vector solução. Se o sistema apresenta a propriedade anterior dizemos que é um sistema estável e a matriz do sistema diz-se bem condicionada. Se o sistema de equações lineares não é estável então diz-se instável e a matriz do sistema diz-se mal condicionada.

A $\|A^{-1}\|\|A\|$ chamamos número de condição da matriz A e é denotado por $\text{cond}(A)$.

Teorema 1.9 *Se A é tal que $cond(A) \leqslant 1$ então o sistema que tem A como matriz é um sistema estável.*

1.4 O polinómio de Taylor

Seja f uma função real definida num intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Um problema que frequentemente se coloca é o de determinar uma função g definida em $[a, b]$ tal que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$, com $\epsilon > 0$ uma tolerância dada, onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma de Chebyshev definida no Exercício 1.5.10. A existência de solução para tal problema é dada pelo Teorema de Weierstrass que apresentamos sem demonstração.

Teorema 1.10 (Weierstrass) *Seja f uma função contínua definida em $[a, b]$. Então, para cada $\epsilon > 0$ existe um polinómio p definido em $[a, b]$ tal que*

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

Notemos a grande importância deste resultado. De acordo com ele, podemos ter a certeza que dada uma função contínua f qualquer existe sempre um polinómio p que está tão próximo de f quanto se queira. Assim sendo, este resultado legitima a aproximação polinomial, isto é, a tarefa de, dada uma função, procurar um polinómio que a aproxime.

Notemos, no entanto, que o teorema não nos diz como podemos construir esse polinómio; ele apenas garante a existência.

Consideremos agora o seguinte teorema, devido a Brook Taylor.

Teorema 1.11 (Taylor) *Se f admite derivadas contínuas até à ordem n (inclusivé) em $[a,b]$, isto é, se $f \in C^n([a,b])$, e se $f^{(n+1)}$ existir em (a,b) então, para todo o $x, x_0 \in [a,b]$,*

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x;x_0), \tag{1.1}$$

onde

$$T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

e

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in I\{x,x_0\},$$

sendo $I\{x,x_0\}$ o intervalo aberto definido por x e x_0.

A (1.1) chamaremos fórmula de Taylor sendo $T_n(x;x_0)$ o polinómio de Taylor de f em torno do ponto x_0 e $R_n(x;x_0)$ o resto (de Lagrange) de ordem n (ou de grau $n+1$). Se $x_0 = 0$ a (1.1) chamaremos fórmula de Maclaurin.

Atente-se ao grande interesse prático deste resultado que afirma que, mediante certas condições, uma função qualquer poder ser escrita como a soma de um polinómio com um resto. Escolhendo valores de x e x_0 tais que

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x;x_0) = 0. \tag{1.2}$$

temos que, a partir de um valor de n suficientemente grande, a função dada pode ser aproximada pelo polinómio de Taylor. Assim, qualquer operação a efectuar sobre a função (derivação, integração, etc.) poderá ser feita sobre o polinómio. Uma função que verifica (1.2) para todo o $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ε positivo e escolhido de forma adequada, diz-se analítica em x_0.

Observação 1.12 *A escolha dos valores de x e x_0 deverá ser feita de modo a que eles pertençam ao intervalo de convergência da série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

designada por série de Taylor*. Neste curso não iremos dar ênfase a esta questão.*

O objectivo fundamental será determinar qual menor valor de n que verifica

$$\max_{\xi \in I\{x,x_0\}} |R_n(x;x_0)| < \eta,$$

sendo $\eta > 0$ uma tolerância previamente fixada. Obtemos assim a aproximação

$$f(x) \approx T_n(x;x_0),$$

cujo erro não excede η. O valor de $R_n(x;x_0)$, sendo um erro absoluto uma vez que

$$|f(x) - T_n(x;x_0)| = |R_n(x;x_0)|,$$

é também designado erro de truncatura.

1.5 Exercícios

Exercício 1.5.1 A equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é usualmente resolvida pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.3}$$

1. Prove que uma solução alternativa é dada por

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{1.4}$$

2. Escreva um programa de computador que resolva equações de segundo grau de duas maneiras distintas: (i) usando as fórmulas (1.3); (ii) calculando uma raiz pela fórmula de (1.3) em que não se subtraem números do mesmo sinal e a outra raiz pela fórmula de (1.4) adequada.

3. Execute o programa construído em (b) quando: (i) $a = 1.0$, $b = -5.0$, $c = 6.0$; (ii) $a = 1.0$, $b = 12345678.03$, $c = 0.92$.

Exercício 1.5.2 Consideremos $E = \mathbb{R}^n$. Prove que as funções seguintes são normas

- $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$, (norma um)
- $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, (norma euclidiana).
- $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, (norma do máximo ou de Chebyshev),

Exercício 1.5.3 Mostre que a função estabelecida na Definição 1.6 é uma norma.

Exercício 1.5.4 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Prove que as seguintes aplicações verificam as propriedades que caracterizam um norma:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exercício 1.5.5 Seja A uma matriz real, não singular e de ordem n. Prove que se λ é um valor próprio de A então

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leqslant |\lambda| \leqslant \|A\|.$$

Exercício 1.5.6 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$.

Exercício 1.5.7 Ao resolver o sistema de equações lineares $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, encontrando-se afectado de um erro δb. Qual o erro que vem para x resultante dessa inexactidão?

Exercício 1.5.8 Como vimos, número de condição de uma matriz A é definido por $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

1. Mostre que uma medida do número de condição pode ser dada por λ_M/λ_m, onde λ_M e λ_m são, respectivamente, o maior e menor (em módulo) valores próprios de A.

2. Mostre que se A é singular cond(A) é infinito e se A é não singular cond$(A) \geqslant 1$.
3. Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2.000112x_1 + 1.414215x_2 &= 0.521471 \\ 1.414215x_1 + 1.000105x_2 &= 0.232279 \end{cases}$$
pelo método de eliminação de Gauss. Sabendo que a sua solução exacta é
$$(x_1, x_2) = (607.1248, -858.2826),$$
explique os resultados obtidos

Exercício 1.5.9 As matrizes dos sistemas
$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x - 1.00001y &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y &= 1 \\ x - 0.99999y &= 0 \end{cases}$$
são aproximadamente iguais. Determine e compare as suas soluções.

Exercício 1.5.10 Num espaço de funções podemos também definir uma norma. Consideremos o conjunto das aplicações contínuas num intervalo $[a, b]$. Este conjunto é um espaço vectorial para a soma de funções e produto de um número real por uma função. Prove que, em $C[a, b]$, são normas as aplicações seguintes:

- $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$, (norma de Chebyshev);
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$, (norma L_2).

Exercício 1.5.11 Calcule um valor aproximado de $\cos 47^o$ utilizando o polinómio de Taylor com resto de grau 3 encontrado para a função $f(x) = \cos x$ em torno de $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Indique o grau de precisão do resultado obtido.

Exercício 1.5.12 Utilizando o desenvolvimento em série de Taylor de $\ln(1 + x)$ em torno de $x_0 = 0$, calcule $\ln(\frac{5}{4})$ com duas casas decimais correctas.

Exercício 1.5.13 Obtenha uma aproximação com três casas decimais correctas para $\ln(1.25)$.

Exercício 1.5.14 Pretende-se calcular uma aproximação do real $A = \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{8}$ com três casas decimais correctas desenvolvendo $\frac{\sin x}{x}$ em série de Taylor.

1. Determine o menor número de termos a tomar naquele desenvolvimento de modo a obter a precisão referida.
2. Calcule A de acordo com a alínea anterior e apresente o erro absoluto cometido.

Exercício 1.5.15 Determine $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ com três casas decimais correctas.

Exercício 1.5.16 Desenvolva em série de Taylor a função $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt$ e indique um limite superior para o erro de truncatura.