

## Capítulo 2

# Interpolação polinomial de funções de uma variável

### 2.1 Introdução

Seja  $f$  uma função real definida num intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e conhecida nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ . Suponhamos ainda, sem perda de generalidade, que esses pontos formam uma partição  $\Delta$  do intervalo  $[a, b]$ , isto é,

$$\Delta : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (2.1)$$

Como poderemos calcular o valor de  $f(x)$  e  $x \in [a, b]$ , tal que  $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ ? Este problema pode ser resolvido por interpolação. Em linhas gerais, o conceito de interpolação consiste em determinar uma função

$$g(x) = a_0\phi_0(x) + \dots + a_n\phi_n(x), \quad (2.2)$$

gerada por uma certa família de funções  $\{\phi_k\}_{k=0}^n$ , por forma a que

$$f(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

A função  $g$  nestas condições é designada por função interpoladora de  $f$  nos pontos de suporte (ou pontos de interpolação)  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . A condição (2.3) é designada condição de interpolação.

**Observação 2.1** *Nada nos garante que o problema da interpolação tenha sempre solução. Por exemplo, fazendo  $\phi_0(x) = 1$  e  $\phi_1(x) = x^2$ , não existe nenhuma função  $g(x) = a_0 + a_1x^2$  que passe nos pontos  $(1, 1)$  e  $(-1, 0)$ .*

O problema da interpolação tem uma grande importância prática, sobretudo no tratamento de funções para as quais se conhece apenas um conjunto finito de valores. Tal situação é muito frequente, por exemplo, no contexto das equações diferenciais. Quando se usam métodos numéricos para aproximar a solução de uma equação diferencial esta fica apenas conhecida num conjunto de pontos. A interpolação permite assim encontrar uma função que passa por esse conjunto de pontos e que pode funcionar como uma aproximação à solução da equação diferencial.

Outra utilidade prática da interpolação consiste na aproximação de uma função com uma expressão analítica complicada por uma outra função mais simples que coincida com a primeira num determinado conjunto de pontos. Assim, quando pretendermos operar com a primeira função podemos fazê-lo, de uma forma aproximada, recorrendo à função interpoladora.

### 2.2 Interpolação polinomial de Lagrange

Vamos considerar o problema de determinar um polinómio  $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  (espaço vectorial dos polinómios de grau menor ou igual a  $n$  com coeficientes reais) que interpole a função  $f$  nos pontos da partição  $\Delta$ . Neste

caso, as funções geradoras  $\{\phi_k\}_{k=0}^n$  terão de constituir uma base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ , espaço de dimensão  $n + 1$ . Um exemplo é dado pela base canónica

$$\phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

**Observação 2.2** *Iremos escrever  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_n([a, b])$  para evidenciar o facto de estarmos a trabalhar no intervalo  $[a, b]$ .*

Vamos começar por demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 2.3 (Lagrange)** *Seja  $f$  uma função definida nos pontos da partição (2.1) do intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Existe um e um só polinómio  $P_n$  de grau menor ou igual a  $n$  interpolador de  $f$  nos pontos dados.*

**Demonstração:** Considerando em  $\mathcal{P}_n([a, b])$  a base canónica (2.4) temos que  $P_n \in \mathcal{P}_n([a, b])$  pode ser escrito na forma

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j.$$

Para que este polinómio verifique as condições de interpolação

$$f(x_i) = P_n(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

os seus coeficientes serão determinados pela resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Como  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ , temos que a matriz deste sistema é uma matriz de Vandermonde invertível (Exercício 2.2.4). Temos que este sistema é possível e determinado e, como tal, podemos dizer que existe um e um só polinómio  $P_n$  de grau menor ou igual a  $n$  que interpola  $f$  nos pontos da partição dada.  $\square$

A determinação do polinómio interpolador por este processo é pouco eficiente e pouco estável. Quanto à eficiência, note-se que a resolução do sistema linear requer  $(n + 1)^3/3 + (n + 1)^2 - (n + 1)/3$  multiplicações/adições ( $\mathcal{O}(n^3)$  operações). Quanto à estabilidade, é possível provar que a matriz de Vandermonde do sistema é muito mal condicionada: prova-se que o número de condição da matriz é tanto maior quanto maior for a sua ordem (dada pelo grau do polinómio). Na prática verifica-se que este método não permite ir além de valores de  $n$  da ordem da dezena quando se trabalha em aritmética com 6 ou 7 decimais.

### 2.2.1 Fórmula de Lagrange

Uma forma mais eficiente de determinar o polinómio interpolador de Lagrange de uma função  $f$  nos pontos da partição (2.1) é obtida à custa da chamada fórmula de Lagrange. Para a definir consideremos o conjunto  $\{\ell_i\}_{i=0}^n$  dos polinómios de Lagrange de grau inferior ou igual a  $n$  dados por

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2.5)$$

Uma vez que  $\{\ell_i\}_{i=0}^n$  constitui uma base de  $\mathcal{P}_n([a, b])$  (Exercício 2.2.5), dado um polinómio  $P_n \in \mathcal{P}_n([a, b])$ , esse polinómio pode ser escrito na forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \ell_i(x).$$

Para que este polinómio verifique as condições de interpolação (2.3) os coeficientes  $c_i$  terão que coincidir com os valores nodais  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , pois  $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ , onde  $\delta_{i,j}$  representa o símbolo de Kronecker

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Assim sendo, o polinómio interpolador de  $f$  nos pontos da partição dada pode ser escrito na forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x). \quad (2.6)$$

As expressões (2.6) e (2.5) definem a fórmula de Lagrange para calcular o polinómio interpolador de  $f$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . O polinómio interpolador calculado é muitas vezes chamado polinómio interpolador de Lagrange de  $f$  nos pontos da partição (2.1).

Notemos que a fórmula de Lagrange pode ser escrita na forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}, \quad (2.7)$$

sendo

$$w(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (2.8)$$

De facto, atendendo a (2.8) temos que

$$w'(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \Rightarrow w'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j),$$

e como tal

$$\ell_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)},$$

o que prova o pretendido.

Na prática, nunca se deve reduzir o polinómio interpolador de Lagrange à sua forma canónica uma vez que esta redução pode implicar perdas de precisão.

Para determinar o esforço computacional necessário à obtenção do polinómio interpolador pela fórmula de Lagrange, note-se que, supondo as constantes

$$F_i = \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}, \quad i = 0, \dots, n,$$

calculadas *a priori*, o cálculo do valor do polinómio interpolador num determinado ponto pode ser dado por

$$P_n(x) = w(x) \left[ \frac{F_0}{x - x_0} + \dots + \frac{F_n}{x - x_n} \right].$$

Este cálculo requer  $n(n+1)$  multiplicações e  $n(n+2)$  adições, isto é,  $\mathcal{O}(n^2)$  operações, o que torna a fórmula de Lagrange muito mais eficiente que o processo matricial.

A fórmula de Lagrange possui, no entanto, o inconveniente de obrigar a refazer os cálculos dos polinómios (2.5) sempre que ocorra uma alteração nos pontos de suporte. Na prática esta situação acontece com frequência, por exemplo, quando pretendemos passar de  $P_n$  a  $P_{n+1}$ , pela adição de mais um ponto  $x_{n+1}$  ao suporte de interpolação, a fim de estudar o comportamento do erro.

### 2.2.2 Fórmula de Newton

Consideremos as seguintes funções

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_i = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Atendendo a que o conjunto  $\{\phi_i\}_{i=0}^n$  constitui uma base  $\mathcal{P}_n([a, b])$  (prove), existem constantes  $c_i, i = 0, \dots, n$ , tais que o polinómio interpolador de Lagrange é dado por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i(x). \quad (2.9)$$

Para determinar  $c_0$  note-se que, se  $P_n(x)$  poder ser escrito na forma (2.9), temos que

$$c_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

De forma similar temos que  $c_1$  pode ser determinado calculando  $P_n$  no ponto  $x_1$ . Assim

$$f(x_0) + c_1(x - x_1) = P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Denotando por  $f[x_0, x_1]$  a diferença dividida de primeira ordem  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  e prosseguindo de forma idêntica deduzimos que

$$c_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

que denotamos por  $f[x_0, x_1, x_2]$ . Podemos deste modo obter um processo recursivo para a determinação dos coeficientes do polinómio se atendermos à seguinte definição.

**Definição 2.4 (Diferenças divididas)** *Seja  $f$  uma função definida nos pontos da partição (2.1) do intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . A*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

*chama-se diferença dividida de primeira ordem de  $f$  relativamente aos argumentos  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . As diferenças divididas de ordem superior definem-se recursivamente. Assim, define-se diferença dividida de ordem  $k$  relativamente aos argumentos  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ , com  $i + k < n$ , por*

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Usando a definição anterior pode demonstrar-se que

$$c_i = f[x_0, \dots, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Substituindo este valor na expressão (2.9) que define  $P_n(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

conhecida por fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas. Abusivamente é usual designar por polinómio interpolador de Newton o polinómio calculado por (2.10).

Um resultado importante respeitante às diferenças divididas é o seguinte.

**Teorema 2.5** *As diferenças divididas são invariantes para qualquer permutação dos índices de suporte.*

**Demonstração:** Com efeito, tem-se que

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = f[x_{i+1}, x_i].$$

Por indução conclui-se facilmente (exercício) que o mesmo acontece para as diferenças divididas de qualquer ordem.  $\square$

A demonstração do teorema anterior poderia ter sido feita atendendo ao seguinte exercício que se demonstra por indução.

**Exercício 2.2.1** Seja  $P_n$  o polinómio interpolador de  $f \in C^{n+1}([a, b])$  de grau inferior ou igual a  $n$  nos pontos da partição (2.1) do intervalo  $[a, b]$  e  $w$  o polinómio nodal dado em (2.8). Mostre que se verifica a igualdade

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}.$$

Apresentámos três processos distintos para a construção do polinómio interpolador de Lagrange de grau  $n$  quando são conhecidos  $n + 1$  valores de uma dada função. Dos processos apresentados aquele que se mostra menos eficiente é o método matricial pois não tem uma forma explícita de determinar os coeficientes do polinómio interpolador. Mais ainda, a determinação destes coeficientes é feita recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares em que a matriz deste sistema pode ser mal condicionada.

O processo de construção mais eficiente é o método das diferenças divididas. O cálculo do polinómio interpolador usando (2.10) na forma encaixada (ver Exercício 2.2.2), supondo calculados os coeficientes  $f(x_0), f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , requer apenas  $2n$  adições/subtrações e  $n$  multiplicações/divisões, isto é,  $\mathcal{O}(n)$  operações.

### 2.2.3 Erro de interpolação

Por definição, o polinómio interpolador coincide com a função num dado conjunto de pontos de suporte. Interessa-nos saber, no entanto, se para os outros pontos do domínio da função, o polinómio interpolador constitui uma boa ou uma má aproximação para a função. Nesse sentido temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.6** *Seja  $P_n$  o polinómio de grau menor ou igual a  $n$  interpolador da função  $f$  nos pontos da partição (2.1) do intervalo  $[a, b]$ . Se  $f \in C^{n+1}([a, b])$  então, para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi = \xi(x) \in ]a, b[$  tal que*

$$e_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \quad (2.11)$$

onde  $w$  é a função nodal dada em (2.8).

**Demonstração:** Se  $x = x_i$ , para algum  $i$  o resultado é, obviamente, válido. Se  $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , defina-se a função auxiliar

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{w(t)}{w(x)}(f(x) - P_n(x)).$$

Ora, como  $F(t) = 0$  possui  $n + 2$  raízes distintas em  $[a, b]$ , uma vez que  $F(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ , e  $F(x) = 0$ , por aplicação do Teorema de Rolle, conclui-se que  $F'(t) = 0$  possui pelo menos  $n + 1$  raízes distintas em  $]a, b[$ ,  $F''(t) = 0$  possui pelo menos  $n$  raízes distintas em  $]a, b[$  e, sucessivamente,  $F^{(n+1)}(t) = 0$  possui pelo menos uma raiz em  $]a, b[$ . Seja  $t = \xi$  essa raiz. Uma vez que

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{w(x)}(f(x) - P_n(x)),$$

substituindo  $t$  por  $\xi$ , obtem-se (2.11).  $\square$

Note-se a semelhança existente entre a fórmula do erro na interpolação e na fórmula de Taylor. A diferença está que, enquanto a primeira usa informação em vários pontos distintos, a segunda recorre apenas a um único ponto.

**Observação 2.7** Na prática a expressão (2.11) não é muito útil uma vez que o valor do ponto intermédio  $\xi$  não é conhecido. Vamos seguidamente considerar algumas formas alternativas de expressar o erro.

1. Pelo teorema anterior podemos determinar um majorante para o erro cometido ao substituir  $f$  pelo seu polinómio interpolador de Lagrange de grau  $n$ ,  $P_n$ . De facto, de (2.11) sai que

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|w\|_\infty. \quad (2.12)$$

2. Atendendo a que  $x, x_j \in [a, b]$ , temos  $|x - x_j| \leq (b - a)$  e portanto

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

3. Atendendo à observação anterior, podemos determinar qual o grau do polinómio interpolador de Lagrange que satisfaz alguma restrição de proximidade. De facto, se considerarmos  $M_{n+1} > 0$  tal que  $\|f^{(n+1)}\|_\infty < M_{n+1}$  temos que, fixado  $\epsilon > 0$ , poderemos determinar o valor de  $n$  tal que

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b - a)^{n+1} < \epsilon.$$

Determinado o valor de  $n$ , e considerando pontos igualmente distânciados em  $[a, b]$ , construímos o polinómio interpolador.

No resultado seguinte é estabelecida uma estimativa mais precisa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo seu polinómio interpolador.

**Teorema 2.8** Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[a, b]$  onde se considera a partição (2.1). Seja  $P_n$  o polinómio interpolador de Lagrange para a função  $f$  e seja

$$h = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Então

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}. \quad (2.13)$$

**Demonstração:** Atendendo às observações anteriores, para concluir a estimativa apresentada provemos que

$$\|w\|_\infty \leq \frac{h^{n+1} n!}{4},$$

com  $w$  a função nodal (2.8). Vamos efectuar a demonstração por indução.

Para  $n = 1$  temos que  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ . Assim,

$$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Como tal,

$$\|w\|_\infty = \max \left\{ |w(a)|, \left| w \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \right|, |w(b)| \right\} = \left| w \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \right| \leq \frac{h^2}{4}.$$

Suponhamos que (2.13) se verifica para  $n$  e provemos a sua veracidade para  $n + 1$ , isto é, que

$$\max_{x \in [a, b]} \prod_{j=0}^{n+1} |x - x_j| \leq \frac{h^{n+2} (n+1)!}{4},$$

com  $a = x_0$  e  $x_{n+1} = b$ . Dado  $x \in [a, b]$  temos que  $x \in [a, x_n]$  ou  $x \in [x_n, b]$ . Consideremos, sem perda de generalidade, a primeira hipótese. Então

$$\max_{x \in [a, b]} \prod_{j=0}^{n+1} |x - x_j| = \max_{x \in [a, b]} \prod_{j=0}^n |x - x_j| |x - b| \leq \frac{h^{n+1} n!}{4} (n+1)h = \frac{h^{n+2} (n+1)!}{4},$$

o que prova o pretendido.  $\square$

Na determinação de uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo seu polinómio interpolador de Lagrange é usada a derivada da função que estamos a aproximar. Em geral esta função é apenas conhecida pontualmente. Vejamos seguidamente como podemos aproximar as derivadas que figuram na estimativa do erro utilizando apenas o valor da função nos pontos da partição do intervalo.

**Teorema 2.9** *Seja  $f$  uma função admitindo derivadas até à ordem  $n+1$  contínuas em  $[a, b]$ . Neste intervalo consideremos a partição (2.1) e seja  $P_n$  o polinómio interpolador de Lagrange para a função  $f$  na partição dada. Então para  $x \in [a, b]$  existe  $\xi = \xi(x) \in ]a, b[$  tal que*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] n! = f^{(n)}(\xi).$$

**Demonstração:** Consideremos o polinómio interpolador de Lagrange (2.10). Temos que, para  $x \in [a, b]$ , o erro de interpolação é dado por

$$e(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right).$$

A função erro tem  $n+1$  zeros em  $[a, b]$ , e portanto, pelo Teorema de Rolle, a função derivada de ordem  $n$  tem pelo menos um zero. Logo existe  $\xi = \xi(x) \in ]a, b[$  tal que  $e^{(n)}(\xi) = 0$ , isto é,

$$f^{(n)}(\xi) - f[x_0, \dots, x_n] n! = 0,$$

o que prova o pretendido.  $\square$

**Observação 2.10** *Pelo teorema anterior, para estimar a derivada de ordem  $n+1$  que figura em (2.11), podemos utilizar diferença dividida de ordem  $n+2$ . De facto, se  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi = \xi(x) \in [a, b]$  tal que*

$$f[x_0, \dots, x_i, x, x_{i+1}, \dots, x_n] (n+1)! = f^{(n+1)}(\xi)$$

e portanto

$$f(x) - P_n(x) \simeq f[x_0, \dots, x_i, x, x_{i+1}, \dots, x_n] w(x).$$

Vamos agora analisar brevemente o problema da convergência do processo de interpolação. Para isso, consideremos uma função  $f$  definida num intervalo  $[a, b]$  onde está definida uma partição uniforme (com  $n+1$  pontos) e seja  $P_n$  o seu polinómio interpolador de Lagrange. Provámos que

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que  $h = \frac{b-a}{n}$ . Se existir uma constante positiva  $M$  tal que

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então

$$\|f - P_n\|_\infty \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}}.$$

Atendendo a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} = 0,$$

concluimos que

$$\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Neste caso, o processo de interpolação é convergente, isto é, o aumento do grau do polinómio implica um aumento de precisão. Existem, no entanto, funções para as quais não podemos concluir que um aumento do grau do proveja um aumento da proximidade do polinómio interpolador com a função interpolada. Isso acontece quando não é possível encontrar um majorante para as derivadas da função. Um exemplo que ilustra esta situação foi considerado por Carl Runge em 1901 e é o apresentado no Exercício 2.2.14. Esse exercício ilustra que, para a interpolação polinomial, podemos ter, em simultâneo, situações de convergência e de divergência.

## 2.2.4 Zeros dos polinómios de Chebyshev

Uma questão interessante consiste em saber como diminuir os erros de interpolação sem aumentar o número de pontos de suporte. A fórmula (2.12) mostra que o erro de interpolação depende tanto de  $\|f^{(n+1)}\|_\infty$  como de  $\|w\|_\infty$  (que depende da escolha dos pontos de interpolação). A questão interessante está em saber, para um dado  $n$ , qual a escolha dos pontos de interpolação que minimiza  $\|w\|_\infty$ . A resposta pode ser dada à custa dos chamados polinómios de Chebyshev.

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $x \in [-1, 1]$  os polinómios de Chebyshev de grau  $n$  são definidos pela relação

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Uma forma simples de provar que  $T_n$  é, de facto, um polinómio, é atendendo à fórmula de recorrência (ver Exercício 2.2.15)

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

**Observação 2.11** Da definição de polinómio de Chebyshev resulta imediatamente que  $|T_n(x)| \leq 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Assim sendo, como  $T_n(1) = 1$ , temos que, em  $[-1, 1]$ ,  $\|T_n\|_\infty = 1$ . Além disso, atendendo ao Exercício 2.2.16, os zeros dos polinómios de Chebyshev estão todos no intervalo  $[-1, 1]$ .

É fácil provar que o coeficiente do termo de maior grau de  $T_n$  é  $a_n = 2^{n-1}$ . Assim sendo, o polinómio  $\tilde{T}_n := 2^{1-n}T_n$  é mónico, isto é, o seu coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade. Designemos por  $\tilde{\mathcal{P}}_n([a, b])$  a classe dos polinómios mónicos de grau menor ou igual a  $n$  em  $[a, b]$ .

**Teorema 2.12** O polinómio  $\tilde{T}_n$  é de todos os polinómios de  $\tilde{\mathcal{P}}_n([-1, 1])$  o que tem menor norma, isto é,

$$\|\tilde{T}_n\|_\infty \leq \|\tilde{P}\|_\infty, \quad \forall \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_n([-1, 1]).$$

**Demonstração:** Sabemos que  $\|\tilde{T}_n\|_\infty = 2^{1-n}$ . Suponhamos que existe  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_n([-1, 1])$  tal que  $\|\tilde{P}\|_\infty < 2^{1-n}$  e seja  $Q = \tilde{T}_n - \tilde{P}$ . Então o grau de  $Q$  é menor ou igual a  $n-1$ . Por outro lado, para os valores de  $x'_k$  dados no Exercício 2.2.16,

$$Q(x'_k) = \tilde{T}_n(x'_k) - \tilde{P}(x'_k) = (-1)^k 2^{1-n} - \tilde{P}(x'_k).$$

Assim sendo, o polinómio  $Q$  tem  $n$  zeros pois tem sinais alternados em  $n$  intervalos e é uma função contínua. Logo  $Q$  é o polinómio nulo, o que prova o resultado.  $\square$

**Observação 2.13** Se considerarmos o intervalo  $[a, b]$  em vez do intervalo  $[-1, 1]$  há que efectuar a mudança de variável

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x.$$

Este resultado permite-nos afirmar, atendendo a que  $w$  dado por (2.8) é um polinómio mónico, que  $\|w\|_\infty$  é mínimo quando se consideram os pontos de suporte

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Neste caso o erro é dado por

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{2^{n+1}(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

O fenómeno de interpolação também é muito sensível a erros dos dados  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e a escolha criteriosa dos pontos de suporte pode, também neste aspecto, ser importante. Suponhamos que o cálculo do polinómio interpolador é efectuado com os valores

$$\hat{y}_i = y_i(1 + \epsilon_i), \quad |\epsilon_i| < \epsilon.$$

Assim, os polinómios que passam por  $(x_i, y_i)$  e  $(x_i, \hat{y}_i)$  são dados, respectivamente, por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

e por

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n \hat{y}_i \ell_i(x).$$

Como tal,

$$|\hat{P}_n(x) - P_n(x)| \leq \epsilon \max_{i=0, \dots, n} |y_i| \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|.$$

Temos então que a função

$$\sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$$

descreve o factor de amplificação dos erros dos dados. O seu valor máximo

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$$

é chamado constante de Lebesgue associada aos pontos de interpolação dados e ao intervalo  $[a, b]$ . Esta constante pode ser calculada numericamente.

### 2.2.5 Exercícios

**Exercício 2.2.2** Consideremos  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  e suponhamos que pretendemos calcular  $p(\bar{x})$ . Ao usar  $P_n(\bar{x}) = a_n \bar{x}^n + a_{n-1} \bar{x}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{x} + a_0$  efectuamos  $n$  adições/subtracções e  $2n - 1$  multiplicações/divisões. No entanto, se considerarmos

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + a_n x))),$$

designada por forma encaixada do polinómio, ao calcular  $p(\bar{x})$  só efectuamos  $n$  adições/subtracções e  $n$  multiplicações/divisões. Esta forma é a base do chamado método (ou algoritmo) de Horner, que consiste formalmente nas seguintes operações:  $p \leftarrow a_n$ ;  $p \leftarrow p\bar{x} + a_i$ ,  $i = n - 1(-1)0$ , sendo  $P_n(\bar{x}) = p$ .

1. Demonstre a chamada regra de Ruffini: O valor numérico de  $P_n(\bar{x})$  de um polinómio  $P_n$  em  $\bar{x}$  é igual ao resto da divisão de  $P_n(x)$  por  $x - \bar{x}$ .

2. Dividindo  $P_n(x)$  por  $x - \bar{x}$  obtém-se  $P_n(x) = (x - \bar{x})q_{n-1}(x) + r$ , onde  $q_{n-1}$  é um polinómio de grau inferior ou igual a  $n - 1$  e  $r$  uma constante. Usando o algoritmo de Horner construa um algoritmo que permita determinar  $r$  e os coeficientes de  $q_{n-1}$  (algoritmo de Ruffini).
3. Calcule o valor de  $p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 12$  em  $\bar{x} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ .
4. Quais as soluções inteiras de um polinómio de grau  $n$  de coeficientes inteiros?

**Exercício 2.2.3** Conhecem-se as coordenadas de cinco pontos de uma curva plana, que representa uma região de uma peça em corte. Determine o polinómio de Lagrange de grau 4 que interpola a referida curva sabendo que os pontos de coordenadas conhecidas são:  $P_1 = (1, 2)$ ,  $P_2 = (2, 1)$ ,  $P_3 = (3, 1)$ ,  $P_4 = (4, 2.5)$  e  $P_5 = (5, 4)$ . Determine ainda valores aproximados para as ordenadas dos pontos cujas abcissas são 0, 2.5 e 6.

**Exercício 2.2.4** Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  pontos distintos de  $\mathbb{R}$ . Mostre que a matriz de Vandermonde que lhe está associada  $V(x_0, \dots, x_n)$  verifica

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k).$$

**Exercício 2.2.5** Prove que  $\{\ell_i\}_{i=0}^n$  constitui uma base de  $\mathcal{P}_n([a, b])$ .

**Exercício 2.2.6** Use o polinómio interpolador de Lagrange para determinar  $\log 2.45$  sabendo que

$x_i$	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
$\log x_i$	0.34242	0.36173	0.38021	0.39794	0.41497

Determine uma estimativa para o erro cometido.

**Exercício 2.2.7** Na seguinte tabela são dados diferentes valores para o peso específico  $p$  da água a diferentes temperaturas  $t$  (em graus centígrados):

$t$	0	1	2	3
$p$	0.999871	0.999928	0.999969	0.999991

Usando interpolação linear, quadrática e cúbica, determine uma aproximação para  $p$  quando  $t = 4^\circ C$  usando a fórmula interpoladora de Lagrange e de Newton. Compare os resultados obtidos sabendo que o valor exacto é 1.000000.

**Exercício 2.2.8** Escreva a fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas usando o algoritmo de Horner.

**Exercício 2.2.9** Pretende-se construir uma tabela para a função  $f(x) = e^x$ , com  $x \in [0, 1]$ . Considere o valor de  $e$  com 5 casas decimais correctas e uma partição com pontos igualmente distanciados. Determine o diâmetro da partição a considerar de modo que o polinómio interpolador de Lagrange permita obter uma aproximação para  $f$  com um erro inferior a  $10^{-6}$ .

**Exercício 2.2.10** Considere a função  $f(x) = \ln(x + 1)$ ,  $x \in [1, 3]$ . Determine o polinómio interpolador de Lagrange que aproxima  $f$  em  $[1, 3]$  com um erro inferior a  $10^{-2}$ .

**Exercício 2.2.11** Determine uma aproximação para o instante na da passagem do perigeu da Lua em Março, 1999, a partir dos valores tabelados para as zero horas de cada dia; indique também a distância (em raios médios da Terra) da Terra à Lua nesse instante.

dia	19	20	21
distância	57.071	56.955	57.059

**Exercício 2.2.12** Determine uma aproximação para a declinação aparente de Vénus para o dia 8 de Maio de 1999, às 18h30m45s, por interpolação cúbica a partir das Efemérides Astronómicas (onde está tabelada para cada dia, às zero horas)

dia	7	8	9	10
$\delta_i$	$+5^{\circ}51'47''.55$	$+6^{\circ}22'25''.20$	$+6^{\circ}52'54''.57$	$+6^{\circ}23'14''.96$

**Exercício 2.2.13** O censo da população dos Estados Unidos, entre 1930 e 1980, produziu os seguintes resultados:

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
População ( $\times 10^3$ )	123203	131669	150697	179323	203212	226505

Use um método de diferenças finitas apropriado para estimar a população nos anos de 1920, 1965, e 2000. Sabendo que a população no ano de 1920 era de  $105711 \times 10^3$ , o que pode inferir quanto à precisão das aproximações obtidas para os anos de 1965 e 2000?

**Exercício 2.2.14** Considere a função (de Runge)  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

1. Verifique graficamente que

$$\|f - P_3\|_{\infty} \leq \|f - P_8\|_{\infty},$$

em que  $P_3$  e  $P_8$  são, respectivamente, os polinómios de Lagrange de grau 3 e 8 interpoladores de  $f$  em partições uniformes de  $[-1, 1]$ .

2. Verifique numericamente que, quando se considera a função de Runge, os polinómios interpoladores  $P_n$  divergem em  $0.726 \leq |x| \leq 1$ .

**Exercício 2.2.15** Obtenha a fórmula de recorrência

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

e conclua que  $T_n$  é, de facto, um polinómio.

**Exercício 2.2.16** Mostre que o polinómio de Chebyshev  $T_n$  tem os seus zeros localizados nos pontos

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

e os extremos localizados em

$$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

nos quais  $T_n(x'_k) = (-1)^k$ .

**Exercício 2.2.17** Mostre numericamente que, quando se consideram pontos igualmente distanciados no intervalo  $[a, b]$ , se tem

$$\Lambda_{20} \simeq 3 \times 10^4, \quad \Lambda_{40} \simeq 10^{10}$$

e quando se consideram os pontos de Chebyshev

$$\Lambda_n \leq 3, \quad (n \leq 30), \quad \Lambda_n \leq 4, \quad (n \leq 100).$$

## 2.3 O polinómio interpolador de Lagrange segmentado

### 2.3.1 Caso linear

Consideremos um intervalo  $[a, b]$  e uma partição  $\Delta$  dada por (2.1). Denotemos por  $\mathcal{P}_1^0(\Delta)$  o conjunto de todas as funções contínuas em  $[a, b]$  que, quando restringidas a cada um dos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da partição, coincidem com um polinómio de grau menor ou igual a um (polinómio que, em geral, varia com  $i$ ). Se  $S_1 \in \mathcal{P}_1^0(\Delta)$  dizemos que  $S_1$  é uma função linear por segmentos ou um polinómio segmentado linear (na partição  $\Delta$ ).

**Observação 2.14** *Note-se que, em geral, nos pontos  $x_i \in \Delta$  as funções  $S_1 \in \mathcal{P}_1^0(\Delta)$  apresentam descontinuidades da derivada.*

Consideremos agora o problema da interpolação. Seja  $f$  uma função conhecida nos pontos da partição  $\Delta$  do intervalo  $[a, b]$ . Pelo que foi visto na secção anterior, existe um e um só polinómio segmentado linear  $S_1 \in \mathcal{P}_1^0(\Delta)$  tal que

$$S_1(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Nestas condições,  $S_1$  é chamado o polinómio interpolador (de Lagrange) segmentado linear de  $f$  nos pontos de  $\Delta$ . Temos que

$$S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_1^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S_1^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde  $S_1^{(i)}$  pode ser escrita na forma seguinte (fórmula de Newton)

$$S_1^{(i)}(x) = f(x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1}),$$

ou ainda (fórmula de Lagrange)

$$S_1^{(i)}(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

O que podemos dizer quanto ao erro que se comete ao aproximar  $f$  por uma função  $S_1 \in \mathcal{P}_1^0(\Delta)$ ? Suponhamos que  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . Então, pelo que foi visto na secção anterior, temos que, nesse intervalo,

$$\|e^{(i)}\|_{i,\infty} := \|f - S_1^{(i)}\|_{i,\infty} := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - S_1^{(i)}| = \frac{\|f^{(2)}\|_{i,\infty}}{2} \|w^{(i)}\|_{i,\infty},$$

onde (como vimos)

$$\|w^{(i)}\|_{i,\infty} := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| = \frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})^2$$

e

$$\|f^{(2)}\|_{i,\infty} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f^{(2)}(x)|.$$

Temos então que, sendo  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,

$$\|e^{(i)}\|_{i,\infty} = \frac{\|f^{(2)}\|_{i,\infty}}{8} h_i^2.$$

Considerando agora o erro no intervalo  $[a, b]$ ,

$$\|e\|_\infty := \|f - S_1\|_\infty,$$

temos que

$$\|e\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \|e^{(i)}\|_{i,\infty} = \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{8} h^2,$$

com  $h = \max_{i=1,\dots,n} h_i$ . Este limite superior para o erro permite demonstrar que o processo de interpolação linear por segmentos é convergente. De facto, se  $f^{(2)}$  é limitada, à medida que o número de pontos da partição aumenta ( $h$  diminui) o erro tende para zero, ou seja, o polinómio segmentado linear tende para a função a interpolar uniformemente em  $[a, b]$ .

**Observação 2.15** *A interpolação linear segmentada possui vantagens em relação à interpolação (global) de Lagrange. Note-se que, se  $n$  for muito grande, o cálculo do polinómio interpolador de Lagrange (global)  $P_n$  envolve muito mais operações que o cálculo do polinómio interpolador linear segmentado  $S_1$ . Além disso, como foi visto, o facto de  $n$  aumentar não implica que o polinómio interpolador de Lagrange  $P_n$  tenda para a função a interpolar, mesmo que essa função seja infinitamente diferenciável. A desvantagem que o processo da interpolação segmentada linear apresenta relativamente à interpolação de Lagrange é que o polinómio  $P_n$  é infinitamente diferenciável enquanto que  $S_1$  pode nem sequer possuir derivadas contínuas nos pontos da partição.*

Como poderemos construir uma base no espaço  $\mathcal{P}_1^0(\Delta)$ ? Para responder a esta questão, vamos determinar as funções  $\{\phi_j\}_{j=0}^n$  tais que, para todo o  $S_1 \in \mathcal{P}_1^0(\Delta)$ ,

$$S_1(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\phi_j(x).$$

As funções  $\{\phi_j\}_{j=0}^n$  nas condições pretendidas terão que ser lineares por segmentos e ser tais que  $\phi_j(x_i) = \delta_{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , por forma a que  $S_1$  seja interpolador de  $f$  nos pontos de  $\Delta$ . Assim, não é difícil de verificar que os gráficos de  $\phi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , serão os das funções chapéu dadas na Figura 2.1. Como é evidente, estas funções constituem uma base de  $\mathcal{P}_1^0(\Delta)$ .

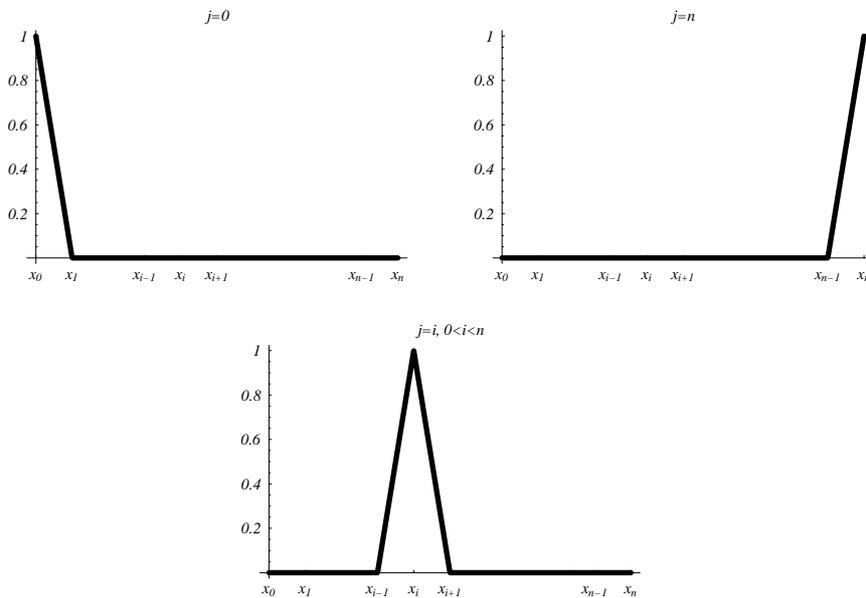


Figura 2.1: Gráficos das funções chapéu  $\phi_j$ .

Não é difícil de ver que as funções chapéu têm as seguintes expressões analíticas (prove):

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

e

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{h_1} & x \in [a, x_1] \\ 0 & x \in [x_1, b] \end{cases}, \quad \phi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_{n-1}] \\ -\frac{x-x_n}{h_n} & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases},$$

onde  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

### 2.3.2 Caso quadrático

Seja  $\mathcal{P}_2^0(\Delta)$  o conjunto das funções contínuas em  $[a, b]$  que, quando restritas a um intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da partição  $\Delta$  dada por (2.1), coincidem com um polinómio do segundo grau. Se  $S_2 \in \mathcal{P}_2^0(\Delta)$  dizemos que  $S_2$  é uma função quadrática por segmentos.

**Observação 2.16** *Note-se que, nos nós da partição, a função  $S_2$  apresenta, em geral, descontinuidades na sua derivada.*

Seja  $f$  uma função conhecida nos pontos da partição  $\Delta$  do intervalo  $[a, b]$ . Suponhamos ainda que conheçamos a função nos pontos intermédios  $x_{i-1/2} \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Assim, existe um e um só  $S_2 \in \mathcal{P}_2^0(\Delta)$  que interpola a função  $f$  tanto nos pontos da partição  $\Delta$  como nos pontos intermédios considerados. Esse polinómio é dado por

$$S_2(x) = \begin{cases} S_2^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_2^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_2^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S_2^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde  $S_2^{(i)}$  pode ser escrita na forma seguinte (fórmula de Newton)

$$S_2^{(i)}(x) = f(x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1/2}](x - x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i](x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2}),$$

ou ainda (fórmula de Lagrange)

$$\begin{aligned} S_2^{(i)}(x) = & f(x_{i-1}) \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i-1/2})(x_{i-1} - x_i)} \\ & + f(x_{i-1/2}) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_i)} \\ & + f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1/2})}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.17** Consideremos a função  $f(x) = \sin \pi x$ ,  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ , e, neste intervalo a partição  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = 1$  e  $x_2 = \frac{3}{2}$ . Determine o polinómio interpolador de Lagrange quadrático interpolador de  $f$  nos pontos da partição e nos pontos intermédios  $x_{1/2} = \frac{3}{4}$  e  $x_{3/2} = \frac{5}{4}$ .

**Resolução:** É imediato que o polinómio pretendido é dado por

$$S_2(x) = \begin{cases} S_2^{(1)}(x) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ S_2^{(2)}(x) & x \in [1, \frac{3}{2}], \end{cases}$$

em que

$$S_2^{(1)}(x) = \sin \frac{\pi (x - \frac{3}{4})(x - 1)}{2 (\frac{1}{2} - \frac{3}{4})(\frac{1}{2} - 1)} + \sin \frac{3\pi (x - \frac{1}{2})(x - 1)}{4 (\frac{3}{4} - 1)(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})} + \sin \pi \frac{(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{4})}{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{4})}, x \in [\frac{1}{2}, 1]$$

e

$$S_2^{(2)}(x) = \sin \pi \frac{(x - \frac{5}{4})(x - \frac{3}{2})}{(1 - \frac{5}{4})(1 - \frac{3}{2})} + \sin \frac{5\pi (x - 1)(x - \frac{3}{2})}{4 (\frac{5}{4} - 1)(\frac{5}{4} - \frac{3}{2})} + \sin \frac{3\pi (x - 1)(x - \frac{5}{4})}{2 (\frac{3}{2} - 1)(\frac{3}{2} - \frac{5}{4})}, x \in [1, \frac{3}{2}].$$

O que podemos dizer quanto ao erro cometido que ao aproximar  $f$  por  $S_2 \in \mathcal{P}_2^0(\Delta)$ ? Tal como foi efectuado para o caso linear podemos provar que

$$\|e\|_\infty := \|f - S_2\|_\infty = \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!} \max_{i=1, \dots, n} \|w^{(i)}\|_{i, \infty},$$

com

$$\|w^{(i)}\|_{i, \infty} := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})(x - x_i)|.$$

Como é que poderemos construir uma base para o espaço  $\mathcal{P}_2^0(\Delta)$ ? Vamos responder a esta questão determinando as funções  $\{\phi_j\}_{j=0}^n$  e  $\{\phi_{j-1/2}\}_{j=1}^n$  tais que, para todo o  $S_2 \in \mathcal{P}_2^0(\Delta)$ ,

$$S_2(x) = f(x_0)\phi_0(x) + \sum_{j=1}^n (f(x_{j-1/2})\phi_{j-1/2}(x) + f(x_j)\phi_j(x)).$$

Consideremos  $\phi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  como sendo a função quadrática por segmentos que toma o valor 1 em  $x = x_j$  e 0 nos restantes nós da partição bem como nos pontos intermédios. Para  $j = 1, \dots, n$ , consideremos  $\phi_{j-1/2}$  como sendo a função quadrática por segmentos que toma o valor 1 em  $x = x_{j-1/2}$  e se anula nos restantes pontos intermédios bem como nos pontos da partição. Assim, não é difícil de verificar que os gráficos de  $\phi_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , e  $\phi_{j-1/2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são os das chamadas funções bigode, dadas nas Figuras 2.2 e 2.3, respectivamente. Como  $\mathcal{P}_2^0(\Delta)$  é um espaço vectorial de dimensão  $2n + 1$  (prove) temos que estas funções constituem uma base de  $\mathcal{P}_2^0(\Delta)$ .

Tal como para o caso das funções chapéu, prova-se facilmente que as funções bigode têm as seguintes expressões analíticas:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1/2})} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{(x-x_{i-1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1/2})(x_i-x_{i+1})} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{1/2})(x-x_1)}{(x_0-x_{1/2})(x_0-x_1)} & x \in [a, x_1] \\ 0 & x \in [x_1, b] \end{cases},$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_{n-1}] \\ \frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n-1/2})}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-1/2})} & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases},$$

e

$$\phi_{i-1/2}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i-1/2}-x_{i-1})(x_{i-1/2}-x_i)} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, b] \end{cases}.$$

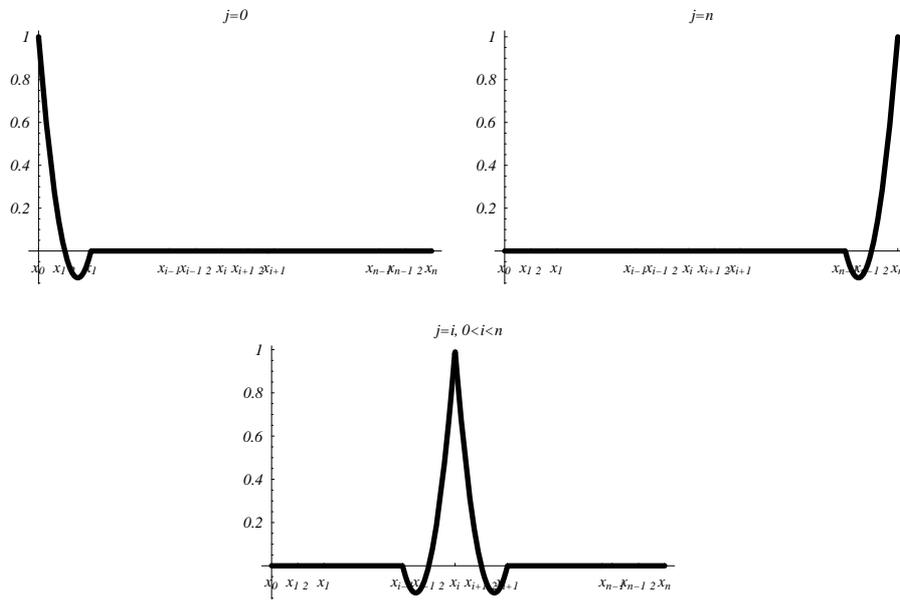


Figura 2.2: Gráficos das funções bigode  $\phi_j$ .

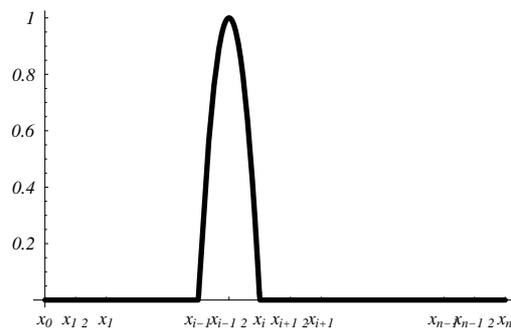


Figura 2.3: Gráficos das funções bigode  $\phi_{j-1/2}$ .

### 2.3.3 Caso geral

Consideremos, de novo, a função  $f$  definida num intervalo  $[a, b]$ . Neste intervalo consideremos a partição  $\Delta$  dada em (2.1) e ainda os pontos intermédios

$$x_{i-(m-1)/m} < x_{i-(m-2)/m} < \cdots < x_{i-2/m} < x_{i-1/m},$$

pertencentes ao intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pelo que foi visto anteriormente, podemos concluir que existe um e um só  $S_m \in \mathcal{P}_m^0(\Delta)$  – conjunto das funções contínuas em  $[a, b]$  que coincidem com um polinómio de grau  $m$  quando restritas a um intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da partição  $\Delta$  – tal que

$$S_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \tag{2.14}$$

e

$$S_m(x_{i-(m-j)/m}) = f(x_{i-(m-j)/m}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m-1, \tag{2.15}$$

dado na forma

$$S_m(x) = \begin{cases} S_m^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_m^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_m^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S_m^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde  $S_m^{(i)}$  pode ser escrita na forma seguinte (fórmula de Newton)

$$\begin{aligned} S_m^{(i)}(x) = & f(x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-(m-1)/m}](x - x_{i-1}) \\ & + \cdots + f[x_{i-1}, x_{i-(m-1)/m}, \dots, x_i](x - x_{i-1})(x - x_{i-(m-1)/m}) \cdots (x - x_{i-1/m}). \end{aligned}$$

O que poderemos dizer relativamente ao erro cometido ao aproximar a função  $f$  pelo polinómio interpolador de Lagrange segmentado  $S_m(x)$ ? Atendendo ao que foi feito para os casos anteriores, é fácil concluir o seguinte resultado.

**Teorema 2.18** *Seja  $f$  uma função com derivadas contínuas até à ordem  $m+1$  em  $]a, b[$ , com  $m \in \mathbb{N}$ . Consideremos a partição  $\Delta$  dada em (2.1) e ainda os pontos  $x_{i-(m-j)/j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , em cada intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nestas condições, se  $S_m \in \mathcal{P}_m^0(\Delta)$  verifica (2.14)–(2.15) então*

$$\|f - S_m\|_\infty \leq \frac{\|f^{(m+1)}\|_\infty}{(m+1)!} \max_{i=1, \dots, n} \|w^{(i)}\|_{i, \infty},$$

com

$$\|w^{(i)}\|_{i, \infty} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \prod_{j=0}^m |x - x_{i-(m-j)/m}|.$$

### 2.3.4 Exercícios

**Exercício 2.3.1** Mostre que a transformação linear  $S_1 \rightarrow (S_1(x_0), \dots, S_1(x_n))$  que aplica  $\mathcal{P}_1^0(\Delta)$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é bijectiva e conclua que  $\mathcal{P}_1^0(\Delta)$  é um espaço vectorial de dimensão  $n+1$ .

**Exercício 2.3.2** Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear para a função  $f$  tal que

$x_i$	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	1.25	1	1.5	1

**Exercício 2.3.3** Calcule o polinômio interpolador de Lagrange segmentado quadrático para a função do exercício anterior.

**Exercício 2.3.4** Determine o polinômio interpolador de Lagrange segmentado linear para uma função  $f$  supondo que esta é conhecida nos pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 = b.$$

**Exercício 2.3.5** Particularize o resultado do exercício anterior para a função  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$  e aproxime  $\cos(20^\circ)$ , indicando um majorante para o erro cometido.

**Exercício 2.3.6** Determine o polinômio interpolador de Lagrange segmentado de grau 2 para uma função  $f$  que se conhece nos pontos

$$a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2 < x_{5/2} < x_3 = b.$$

**Exercício 2.3.7** Particularize o exercício anterior para

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

**Exercício 2.3.8** Determine o polinômio interpolador de Lagrange segmentado cúbico para uma função  $f$  supondo que esta é conhecida nos pontos

$$a = x_0 < x_{1/3} < x_{2/3} < x_1 < x_{4/3} < x_{5/3} < x_2 = b.$$

**Exercício 2.3.9** Particularize o resultado do exercício anterior para a função  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , indicando um majorante para o erro cometido.

**Exercício 2.3.10** Prove que se

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

o limite superior para o erro cometido na interpolação quadrática segmentada é dado por

$$\|f - S_2\|_\infty \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{216} \sqrt{3} h^3,$$

com  $h = |x_i - x_{i-1}|$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Exercício 2.3.11** Considere a seguinte tabela de valores da gravidade específica do ácido fosfórico como função da percentagem de  $H_3PO_4$ .

$H_3PO_4(\%)$	Grav. esp.	$H_3PO_4(\%)$	Grav. esp.
0	1.0000	35	1.216
1	1.0038	40	1.254
2	1.0092	45	1.293
4	1.0200	50	1.335
6	1.0309	55	1.379
8	1.0420	60	1.426
10	1.0532	65	1.475
12	1.0647	70	1.526
14	1.0764	75	1.579
16	1.0884	80	1.633
18	1.1008	85	1.689
20	1.1134	90	1.746
22	1.1263	92	1.770
24	1.1395	94	1.794
26	1.1529	96	1.819
28	1.1665	98	1.844
30	1.1805	100	1.870

1. Aproxime os dados usando interpolação polinomial. Comente os resultados obtidos.
2. Use a função determinada por interpolação para tabelar a gravidade específica obtida para percentagens de 0, 5, 10, ..., 100 de  $H_3PO_4$ .

**Exercício 2.3.12** Durante a sedimentação da reação de saponificação entre quantidades equimolares de hidróxido de sódio e acetato de etilo, a concentração  $c$  (g mole/litro) de cada reagente varia com o tempo  $t$  (min) de acordo com a equação

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + kt,$$

onde  $c_0$  é a concentração inicial e  $k$  (litro/g mole min) é a constante de reacção. Foram obtidos os seguintes resultados em laboratório à temperatura de  $77^\circ F$ :

$1/c$	24.7	32.4	38.4	45.0	52.3	65.6	87.6	102	154	192
$t$	1	2	3	4	5	7	10	12	20	25

1. Obtenha uma estimativa para a concentração inicial.
2. Obtenha uma estimativa para a concentração ao fim de 15 minutos e compare-a com a solução obtida em laboratório (ao fim de 15 minutos obteve-se  $1/c = 135$ ).

## 2.4 Interpolação de Hermite

O objectivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função  $f$  por um polinómio que seja interpolador de  $f$  em alguns pontos do seu domínio e que a sua derivada seja interpolador da derivada de  $f$  nesses mesmos pontos. Isto é, supondo que  $f$  é diferenciável, vamos procurar um polinómio  $H$  tal que

$$\begin{aligned} f(x_i) &= H(x_i) \\ f'(x_i) &= H'(x_i) \end{aligned}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Quando tal situação acontece dizemos que  $f$  e  $H$  são funções que 2-osculam (osculam 2 vezes) os pontos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ou que  $H$  é um polinómio 2-osculador de  $f$  nos pontos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

### 2.4.1 Existência e unicidade

O próximo teorema estabelece a existência e unicidade do polinómio de grau inferior ou igual a  $2n + 1$  que verifica (2.16). Além disso, indica-nos um processo que permite a sua determinação.

**Teorema 2.19** *Seja  $f \in C^{2n+2}([a, b])$  e  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos distintos em  $[a, b]$ . Existe um e um só polinómio  $H_{2n+1}$  de grau menor ou igual a  $2n + 1$  que verifica (2.16).*

**Demonstração:** Atendendo às condições impostas, o polinómio terá que ser de grau inferior ou igual a  $2n + 1$ . Para provar a sua existência vamos considerar as funções

$$h_i(x) = [1 - 2\ell'_i(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \quad \text{e} \quad \bar{h}_i(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \quad i = 0, \dots, n,$$

com  $\ell_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , os polinómios de Lagrange (2.6). Como se pode verificar facilmente

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h'_i(x_j) = 0, \quad i, j = 0, \dots, n,$$

e

$$\bar{h}_i(x_j) = 0, \quad \bar{h}'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Assim, o polinómio

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [f(x_i)h_i(x) + f'(x_i)\bar{h}_i(x)]$$

tem grau inferior ou igual a  $2n + 1$  e verifica (2.16).

Falta apenas provar a unicidade. Seja  $Q_{2n+1}$  outro polinómio de grau inferior ou igual a  $2n + 1$  que verifica (2.16) e

$$R_{2n+1}(x) = H_{2n+1}(x) - Q_{2n+1}(x).$$

Como  $R_{2n+1}(x_i) = R'_{2n+1}(x_i) = 0$ , para  $i = 0, \dots, n$ , temos que este polinómio de grau inferior ou igual a  $2n + 1$  tem  $2n + 2$  zeros o que implica que terá que ser o polinómio nulo. Assim sendo, provámos a unicidade pretendida.  $\square$

O único polinómio de grau menor ou igual a  $2n + 1$  que verifica as condições (2.16) é também chamado polinómio interpolador de Hermite de  $f$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Observação 2.20** *Note-se que, tal como na interpolação de Lagrange, se  $m$  for o número de condições impostas para a determinação do polinómio interpolador, o seu grau é  $m - 1$ .*

A obtenção do polinómio interpolador de Hermite pode ser feita de várias maneiras. Vamos apresentá-la neste curso numa forma que generaliza o polinómio interpolador de Newton das diferenças divididas.

Consideremos a mudança de variável  $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1, z_3 = x_1, \dots, z_{2n} = x_n, z_{2n+1} = x_n$ . Uma vez que

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

não podemos definir as diferenças divididas

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f[x_i, x_i].$$

No entanto, atendendo a que

$$\lim_{x \rightarrow x_i} f[x, x_i] = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i),$$

podemos definir as diferenças divididas generalizadas para pontos não distintos na forma

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i).$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange generalizado podemos ainda definir

$$f[\underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{r+1 \text{ vezes}}] = \frac{f^{(r)}(x_i)}{r!}. \tag{2.17}$$

Com esta notação pode verificar-se facilmente que o polinómio interpolador de Hermite de grau  $2n + 1$  nos pontos da partição (2.1) é dado por (verifique para  $n = 1$ )

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) &= f(z_0) + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \dots, z_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - z_j) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\ &\quad + \dots + f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})^2(x - x_n). \end{aligned}$$

O polinómio interpolador de Hermite pode assim ser determinado recorrendo à tabela das diferenças divididas generalizadas, tabela essa onde cada ponto aparece repetido duas vezes.

**Exemplo 2.21** Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função  $f(x) = \sin x$  em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Resolução:** Temos

$x_i$	$f(x_i)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
0	0	1		
0	0	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4-2\pi}{\pi^2}$	$-\frac{16+4\pi}{\pi^3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-\frac{4}{\pi^2}$	
$\frac{\pi}{2}$	1			

Logo

$$H_3(x) = x + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2}x^2 - \frac{16 + 4\pi}{\pi^3}x^2(x - \frac{\pi}{2}) = x[1 + x[-0.231 - 0.921(x - \frac{\pi}{2})]].$$

### 2.4.2 Erro de interpolação

O estudo do erro na interpolação de Hermite consiste na generalização do estudo efectuado para a interpolação de Lagrange de acordo com o seguinte teorema.

**Teorema 2.22** *Seja  $H_{2n+1}$  o polinómio, de grau menor ou igual a  $2n + 1$  interpolador de Hermite da função  $f$  nos pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ . Se  $f \in C^{2n+2}([a, b])$  então para cada  $x \in [a, b]$  existe  $\xi = \xi(x) \in ]a, b[$  tal que*

$$e(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!}w^2(x), \tag{2.18}$$

onde  $w$  é a função dada por (2.8).

**Demonstração:** Se  $x = x_i$ , para algum  $i$  o resultado está provado. Se  $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , definamos a função auxiliar

$$F(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{w(t)^2}{w(x)^2}(f(x) - H_{2n+1}(x)).$$

Como  $F(t) = 0$  possui  $2n + 3$  raízes ( $n + 1$  zeros duplos  $x_i, i = 0, \dots, n$  e uma raiz simples  $x$ ) temos, por aplicação do Teorema de Rolle generalizado, que  $F^{(2n+2)}(t) = 0$  possui, pelo menos, uma raiz em  $]a, b[$ . Seja  $\xi$  essa raiz. Uma vez que

$$F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{(2n + 2)!}{w(x)^2}(f(x) - H_{2n+1}(x)),$$

substituindo  $t$  por  $\xi$  obtém-se o resultado pretendido.  $\square$

**Observação 2.23** *Tal como no caso da interpolação de Lagrange podemos efectuar as seguintes observações.*

1. *Pelo teorema anterior, podemos determinar um majorante para o erro cometido ao substituir  $f$  pelo seu polinómio interpolador de Hermite de grau  $n, H_{2n+1}$ . De facto, de (2.18) sai que:*

$$\|f - H_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n + 2)!} \|w^2\|_\infty.$$

2. *Atendendo a que  $x, x_j \in [a, b]$ , temos que  $|x - x_j| \leq (b - a)$  e portanto*

$$\|f - H_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n + 2)!} (b - a)^{2n+2}.$$

3. Uma vez que

$$\|w\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}n!}{4},$$

com  $h = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ , temos que

$$\|f - H_{2n+1}\|_\infty \leq \|f^{(2n+2)}\|_\infty \frac{h^{2n+2}(n!)^2}{16(2n+2)!}.$$

Observamos que dependendo do comportamento de  $\|f^{(2n+2)}\|_\infty$  podemos, ou não, concluir que o aumento do grau do polinómio interpolador de Hermite implica uma diminuição do erro cometido ao aproximar a função por este polinómio. Uma forma de minimizar o erro consiste na utilização de polinómios interpoladores de Hermite segmentados.

### 2.4.3 Interpolação de Hermite segmentada

Consideremos um intervalo  $[a, b]$  e uma partição dada por (2.1). Designemos por polinómio segmentado cúbico (ou função cúbica por segmentos) na partição  $\Delta$  dada por (2.1), uma função  $S$  contínua em  $[a, b]$  que, quando restringida a cada um dos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da partição, coincide com um polinómio de grau menor ou igual a três. Neste caso, dizemos que  $S \in \mathcal{P}_3^1(\Delta)$ .

Seja  $f$  uma função conhecida nos pontos da partição (2.1). Como se sabe, existe um e um só polinómio segmentado cúbico  $S_H$  tal que

$$\begin{aligned} S_H(x_i) &= f(x_i) \\ S'_H(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Nestas condições,  $S_H$  é chamado o polinómio interpolador (de Hermite) segmentado cúbico de  $f$  nos pontos de (2.1). Temos que

$$S_H(x) = \begin{cases} S_H^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_H^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_H^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S_H^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde  $S_H^{(i)}$  pode ser escrita na forma seguinte

$$\begin{aligned} S_H^{(i)}(x) &= f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\ &\quad + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i). \end{aligned}$$

O que foi feito para  $S_H \in \mathcal{P}_3^1(\Delta)$  poderia ser generalizado para  $S_H \in \mathcal{P}_{2m+1}^1(\Delta)$ , desde que se conhecesse a função  $f$  e a sua derivada nos pontos de  $\Delta$  e nos pontos intermédios  $x_{i-(m-j)/m} \in ]x_{i-1}, x_i[$ , com  $j = 1, \dots, m-1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . (Determine a expressão analítica de  $S_H \in \mathcal{P}_{2m+1}^1(\Delta)$  nas condições descritas.)

Vamos agora estudar o erro que se comete ao aproximar  $f$  por  $S_H \in \mathcal{P}_{2m+1}^1(\Delta)$  apresentando o seguinte teorema do erro, cuja demonstração resulta imediatamente do Teorema 2.22.

**Teorema 2.24** *Seja  $f$  uma função com derivadas contínuas até à ordem  $2m+2$  em  $]a, b[$ , com  $m \in \mathbb{N}$ . Consideremos a partição  $\Delta$  dada em (2.1) e ainda os pontos  $x_{i-(m-j)/j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ , em cada intervalo  $]x_{i-1}, x_i[$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nestas condições, se  $S_H \in \mathcal{P}_{2m+1}^1(\Delta)$  oscula duas vezes com  $f$  os pontos de  $\Delta$  bem como os pontos intermédios  $x_{i-(m-j)/j}$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então*

$$\|f - S_H\|_\infty \leq \frac{\|f^{(2m+2)}\|_\infty}{(2m+2)!} \max_{i=1, \dots, n} \|(w^{(i)})^2\|_{i, \infty},$$

com

$$\|(w^{(i)})^2\|_{i,\infty} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \prod_{j=0}^m |x - x_{i-(m-j)/m}|^2.$$

Como é que poderemos construir uma base para o espaço  $\mathcal{P}_3^1(\Delta)$ ? Para responder a essa questão, comecemos por notar que  $\mathcal{P}_3^1(\Delta)$  é um espaço vectorial de dimensão  $2n + 2$ . Determinemos agora as funções  $\{\phi_j\}_{j=0}^n$  e  $\{\bar{\phi}_j\}_{j=1}^n$  tais que, para todo o  $S_H \in \mathcal{P}_3^1(\Delta)$ ,

$$S_H(x) = \sum_{i=1}^n (f(x_i)\phi_i(x) + f'(x_i)\bar{\phi}_i(x)).$$

Consideremos  $\phi_i, \bar{\phi}_i \in \mathcal{P}_3^1(\Delta)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , tais que, para todo  $i, j = 0, \dots, n$ ,  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,  $\phi'_i(x_j) = 0$ ,  $\bar{\phi}_i(x_j) = 0$ ,  $\bar{\phi}'_i(x_j) = \delta_{ij}$ . Prove que as funções  $\phi_i, \bar{\phi}_i \in \mathcal{P}_3^1(\Delta)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , pretendidas têm as seguintes expressões analíticas (prove):

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x_i - x_{i-1}) - 2(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^3} (x - x_{i-1})^2 & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_i - x_{i+1}) - 2(x - x_i)}{(x_i - x_{i+1})^3} (x - x_{i+1})^2 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{(x_0 - x_1) - 2(x - x_0)}{(x_0 - x_1)^3} (x - x_1)^2 & x \in [a, x_1] \\ 0 & x \in [x_1, b] \end{cases},$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_{n-1}] \\ \frac{(x_n - x_{n-1}) - 2(x - x_n)}{(x_n - x_{n-1})^3} (x - x_{n-1})^2 & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases},$$

e

$$\bar{\phi}_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{(x_i - x_{i+1})^2} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \in [a, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, b] \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\bar{\phi}_0(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2} & x \in [a, x_1] \\ 0 & x \in [x_1, b] \end{cases},$$

$$\bar{\phi}_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_{n-1}] \\ \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1})^2} & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases}.$$

#### 2.4.4 Polinómios osculadores

Para finalizar esta secção vamos generalizar o raciocínio efectado na obtenção do polinómio interpolador de Hermite para determinar polinómios que osculem os pontos de suporte mais do que duas vezes.

Suponhamos que, dada uma função  $f$  suficientemente diferenciável, queremos determinar um polinómio  $H_N$  que verifique

$$\frac{d^j f}{dx^j}(x_i) = \frac{d^j H_N}{dx^j}(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, r_i. \quad (2.19)$$

Quando tal situação acontece dizemos que  $f$  e  $H_N$  são funções que  $r_i$ -osculam (osculam  $r_i$  vezes) o ponto  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Apresentemos o seguinte teorema sem demonstração.

**Teorema 2.25** Existe um único polinómio  $H_N$ , de grau menor ou igual a  $N$ , com

$$N = n + \sum_{j=0}^n r_j,$$

que satisfaz (2.19).

A determinação do polinómio referido no teorema anterior pode ser feita de forma análoga à do polinómio interpolador de Hermite. Não iremos considerar o caso geral mas sim um exemplo elucidativo.

**Exemplo 2.26** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$  e suponhamos são dados os valores  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f'(a)$ ,  $f'(b)$  e  $f''(a)$ . Determine o polinómio  $H_4(x)$  que verifica

$$H_4(a) = f(a), H_4(b) = f(b), H_4'(a) = f'(a), H_4'(b) = f'(b), H_4''(a) = f''(a).$$

**Resolução:** O polinómio  $H_4(x)$  vai pertencer ao espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 4. Neste espaço as funções

$$1, (x - a), (x - a)^2, (x - a)^3, (x - a)^3(x - b),$$

são linearmente independentes e portanto

$$H_4(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + C_4(x - a)^3(x - b).$$

Determinemos as constantes atendendo às condições impostas a este polinómio. Atendendo a que  $H_4(a) = f(a)$  vem  $C_0 = f(a)$ . Atendendo a que  $H_4'(a) = f'(a)$  obtemos  $C_1 = f'(a) = f[a, a]$ . Atendendo a que  $f''(a) = H_4''(a)$  vem  $C_2 = f''(a)/2$  e que pode ser representado por  $f[a, a, a]$ .

De facto, comecemos por notar que

$$\begin{aligned} f[a, a + h, a + h + k] &= \frac{f[a + h, a + h + k] - f[a, a + h]}{h + k} \\ &= \frac{\frac{f(a + h + k) - f(a + h)}{k}}{h + k}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{f(a + h + k) - f(a + h)}{k} - \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f[a, a + h, a + h + k](h + k).$$

Mas,

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + h\mathcal{O}(h), \quad f(a + h + k) - f(a + h) = f'(a + h)k + k\mathcal{O}(k),$$

em que  $\mathcal{O}(h)$  e  $\mathcal{O}(k)$  denotam quantidades que convergem para zero com  $h$  e  $k$  respectivamente. Substituindo vem

$$f[a, a + h, a + h + k](h + k) = f'(a + h) + \mathcal{O}(k) - f'(a) - \mathcal{O}(h).$$

Consideremos, na igualdade anterior o limite quando  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ . Existindo este limite, em particular existe quando  $h = k$  e deduzimos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} f[a, a + h, a + h + k] = \frac{f''(a)}{2}$$

e portanto podemos considerar

$$f[a, a, a] = \frac{f''(a)}{2}.$$

De  $H_4(b) = f(b)$  deduzimos uma expressão para  $C_3$  e, facilmente se obtém,

$$C_3 = f[a, a, a, b].$$

Considerando  $H_4'(b) = f'(b)$  vem

$$C_4 = \frac{f'(b) - f[a, a] - 2f[a, a, a](b - a) - 3f[a, a, a, b](b - a)^2}{(b - a)^3},$$

e, tem-se

$$C_4 = f[a, a, a, b, b].$$

Substituindo, vem finalmente

$$H_4(x) = f(a) + f[a, a](x - a) + f[a, a, a](x - a)^2 + f[a, a, a, b](x - a)^3 + f[a, a, a, b, b](x - a)^3(x - b).$$

O polinómio anterior pode ser construído utilizando a tabela das diferenças divididas para os seguintes pontos  $(y_i, g(y_i)), i = 0, \dots, 4$ , com

$$y_0 = a, y_1 = a, y_2 = a, y_3 = b, y_4 = b$$

e

$$g(y_0) = g(y_1) = g(y_2) = f(a), \quad g(y_3) = g(y_4) = f(b)$$

e atendendo a que

$$\begin{aligned} g[y_0, y_1] &= f[a, a] = f'(a) \\ g[y_0, y_1, y_2] &= f[a, a, a] = f''(a)/2 \\ g[y_2, y_3] &= f[b, b] = f'(b) \\ g[y_3, y_4] &= f[b, b] = f'(b) \end{aligned} .$$

De acordo com o efectuado no exercício anterior, apresentamos, de seguida, um exemplo numérico.

**Exemplo 2.27** Determine polinómio interpolador de uma função  $f$  para o suporte  $f(0) = -1, f'(0) = -2, f(1) = 0, f'(1) = 10$  e  $f''(1) = 40$ .

**Resolução:** O polinómio pretendido pode ser determinado com a ajuda de seguinte tabela

$x_i$	$f(x_i)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
0	-1				
0	-1	-2			
1	0	1	3	6	5
1	0	10	9	11	
1	0	10	20		
1	0				

Assim

$$H_4(x) = -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x - 1) + 5x^2(x - 1)^2 = -1 + x[-2 + x[3 + (x - 1)[6 + 5(x - 1)]]].$$

**Observação 2.28** Note-se que o polinómio de Maclaurin de  $f$  de grau  $n$  oscula, com  $f$ ,  $n + 1$  vezes a origem. De facto, sendo o polinómio de Maclaurin de  $f$  dado por

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

temos que

$$\begin{aligned} f(0) &= P_n(0) \\ f'(0) &= P'_n(0) \\ &\dots \\ f^{(n)}(0) &= P_n^{(n)}(0) \end{aligned} .$$

A questão natural que se coloca é a seguinte: poderemos determinar um polinómio segmentado que apresente as derivadas de primeira e segunda ordens contínuas nos pontos da partição  $\Delta$ , isto é, poderemos determinar  $S \in \mathcal{P}_m^2(\Delta)$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , interpolador de  $f$  nos pontos de  $\Delta$ ? A resposta à questão anterior é afirmativa. De facto, considerando apenas o caso em que  $S \in \mathcal{P}_5^2(\Delta)$ , temos que o polinómio que verifica as condições

$$S(x_i) = f(x_i), \quad S'(x_i) = f'(x_i), \quad S''(x_i) = f''(x_i),$$

é dado por

$$S(x) = \begin{cases} S^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} ,$$

com

$$\begin{aligned} S^{(i)}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_0, x_1](x - x_0)^3 + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^3(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_1](x - x_0)^3(x - x_1)^2. \end{aligned}$$

O grau mínimo para o polinómio segmentado que apresenta primeira e segunda derivadas contínuas nos pontos da partição é 5. Será, no entanto, que existe um polinómio de grau 3 que tenha as derivadas de primeira e segunda ordens contínuas nos pontos da partição? Esta questão é o alvo de estudo da secção seguinte.

### 2.4.5 Exercícios

**Exercício 2.4.1** Construa um algoritmo para determinar o valor do polinómio interpolador de Hermite num determinado ponto do seu domínio.

**Exercício 2.4.2** Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função  $f(x) = \sin x$  quando se considera  $x \in [0, \pi/2]$ .

**Exercício 2.4.3** Determine, de dois modos distintos, o polinómio interpolador de Hermite para os dados

$x_i$	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.75	1	0.25
$f'(x_i)$	0.25	0.5	0.75

**Exercício 2.4.4** Considere a função  $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ . Determine uma aproximação para  $f(1.03)$  usando o polinómio interpolador de Hermite considerando os pontos  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1.05$ . Determine uma estimativa para o erro cometido.

**Exercício 2.4.5** Considere  $f(x) = e^x$ . Determine o polinômio interpolador de Hermite de grau 5 –  $H_5$  – usando os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$ . Compare  $H_5(0.25)$  com  $f(0.25)$  e com  $P_2(0.25)$  em que  $P_2$  é o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2, para a função  $f$ , determinado nos mesmos pontos.

**Exercício 2.4.6** Determine o polinômio de grau mínimo que faça a concordância entre a recta

$$y = -2 + \frac{1}{2}(8 - x), \quad \text{no ponto } (8, -2),$$

e a circunferência

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1, \quad \text{no ponto } (1, -1).$$

*Nota: Duas curvas dizem-se concordantes de tiverem a mesma tangente no ponto de união.*

**Exercício 2.4.7** Considere  $f(x) = e^x$ . Determine o polinômio interpolador de Hermite de grau 5 –  $H_5$  – usando os pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$ . Compare  $H_5(0.25)$  com  $f(0.25)$  e com  $P_2(0.25)$  em que  $P_2$  é o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2, para a função  $f$ , determinado nos mesmos pontos.

**Exercício 2.4.8** Mostre que o erro que se comete ao aproximar  $f \in C^4([a, b])$  pelo seu polinômio interpolador segmentado de Hermite cúbico na partição (2.1) é dado por

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S_H(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4,$$

onde

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

$$e \ h = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}).$$

**Exercício 2.4.9** Considere as funções  $f$  e  $g$  das quais se conhecem os valores

$x_i$	0	1
$f(x_i)$	-1	0
$f'(x_i)$	-2	10
$f''(x_i)$		40

$x_i$	0	0.25
$g(x_i)$	0.75	1
$g'(x_i)$	0.25	0.5
$g''(x_i)$	0.25	0.5

1. Determine o polinômio  $P$  que oscula com  $f$  duas vezes o ponto  $x_0 = 0$  e três vezes o ponto  $x_1 = 1$ .
2. Determine o polinômio  $P$  que oscula com  $g$  duas vezes os pontos  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0.25$ .

**Exercício 2.4.10** Determine o polinômio interpolador de Hermite segmentado cúbico de  $f$  sabendo que

$x_i$	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.5	1	0.5
$f'(x_i)$	0.5	0	-0.5

**Exercício 2.4.11** Suponha que conhece uma função e a sua derivada nos pontos

$$x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2.$$

Determine o polinômio interpolador de Hermite segmentado de grau 5 de dois modos distintos.

**Exercício 2.4.12** Particularize o exercício anterior para a função  $f(x) = \cos x$  considerando os pontos

$$x_0 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{\pi}{4}, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_{3/2} = \frac{5\pi}{4}, \quad x_2 = \pi.$$

## 2.5 Interpolação com funções *spline*

### 2.5.1 Abordagem clássica

O termo inglês *spline* pode ser traduzido pelo vocábulo “virote”. Um virote é um instrumento usado pelos desenhadores para unir um conjunto de pontos do plano.

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$  onde consideramos a partição  $\Delta$  dada por (2.1). Matematicamente, o problema de unir pontos do plano com um virote pode ser traduzido da seguinte forma: determinar a função  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a = x_0$ ,  $b = x_n$ , que satisfaz:

$$[S1] \quad S(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n;$$

$$[S2] \quad S \in C^2([a, b]);$$

[S3] o princípio de Maupertius da energia mínima, isto é,

$$\int_a^b (S''(x))^2 dx \leq \int_a^b (g''(x))^2 dx,$$

para toda a função  $g$  que satisfaz [S1] e [S2].

Temos os seguinte resultado.

**Teorema 2.29** *Sejam  $S, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções que verificam [S1] e [S2]. Suponhamos que*

$$S''(b)[g'(b) - S'(b)] = S''(a)[g'(a) - S'(a)]$$

*e que  $S$  é um polinómio de grau 3 em cada sub-intervalo da partição dada. Então temos que*

$$\int_a^b (S''(x))^2 dx \leq \int_a^b (g''(x))^2 dx.$$

**Demonstração:** Temos que

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx - \int_a^b (S''(x))^2 dx = \int_a^b (g''(x) - S''(x))^2 dx + 2 \int_a^b S''(x)(g''(x) - S''(x)) dx.$$

Mas, integrando por partes o último integral do segundo membro vem

$$\begin{aligned} \int_a^b S''(x)(g''(x) - S''(x)) dx &= S''(b)[g'(b) - S'(b)] - S''(a)[g'(a) - S'(a)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} S'''(x)(g''(x) - S''(x)) dx. \end{aligned}$$

Ora, atendendo às hipóteses do teorema,

$$\int_a^b S''(x)(g''(x) - S''(x)) dx = 0$$

e, como tal,

$$\int_a^b (S''(x))^2 dx = \int_a^b (g''(x))^2 dx - \int_a^b (g''(x) - S''(x))^2 dx,$$

o que permite concluir o pretendido.  $\square$

Este teorema mostra que os candidatos à resolução de [S1]–[S3] são as funções pertencentes a  $C^2([a, b])$  que são polinómios de grau 3 em cada intervalo da partição, isto é, são funções  $S \in \mathcal{P}_3^2(\Delta)$ . Essas funções serão designadas por funções *spline* cúbicas.

**Definição 2.30 (Spline)** Uma função spline de ordem  $m$  é um polinómio segmentado de grau  $m - 1$  continuamente derivável até à ordem  $m - 2$ . Por outras palavras, dada uma partição  $\Delta$  da forma (2.1),  $S$  é uma função spline de ordem  $m$  se  $S \in \mathcal{P}_{m-1}^{m-2}(\Delta)$ , ou seja, se

$$\frac{d^k}{dx^k} S^{(i+1)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} S^{(i)}(x), \quad k = 0, \dots, m - 2, i = 1, \dots, n - 1,$$

com  $S^{(i)}(x) = S(x)$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

As funções spline mais populares são as cúbicas ( $m = 4$ ). Pelas razões apresentadas, serão essas que iremos considerar.

Note-se que, em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  a função  $S \in \mathcal{P}_3^2(\Delta)$  que interpola  $f$  nos pontos da partição (2.1) é um polinómio de grau 3 e, como tal, é definido à custa de 4 parâmetros. Assim, para determinar  $S$  de forma única temos que especificar  $4n$  parâmetros. Para isso temos que definir  $4n$  equações. Atendendo à definição de função spline temos impostas as seguintes equações:  $n + 1$  equações de interpolação;  $n + 1$  equações de ligação de  $S$ ;  $n + 1$  equações de ligação de  $S'$  e  $n + 1$  equações de ligação de  $S''$ . No total temos assim  $4n - 2$  equações. Para determinar  $S$  temos que considerar mais duas condições suplementares. As formas mais usuais de definir essas condições são as seguintes:  $S'(a) = f'(a)$  e  $S'(b) = f'(b)$  (Spline completa);  $S''(a) = f''(a)$  e  $S''(b) = f''(b)$  (Spline natural);  $S''(a) = 0$  e  $S''(b) = 0$  (Spline livre);  $S'(a) = S'(b)$  e  $S''(a) = S''(b)$  (Spline periódica).

O seguinte teorema, que apresentamos sem demonstração, estabelece a existência e unicidade da função spline cúbica interpoladora.

**Teorema 2.31** Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$ . A função spline cúbica completa (natural, livre, periódica) interpoladora de  $f$  nos pontos da partição  $\Delta$  dada em (2.1) existe e é única.

### 2.5.2 Funções de base

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$  onde consideramos a partição  $\Delta$  dada por (2.1). Suponhamos que os pontos da partição são igualmente espaçados e seja  $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Consideremos os seguintes pontos auxiliares

$$\begin{aligned} x_{-1} &= a - h, x_{-2} = a - 2h, x_{-3} = a - 3h \\ x_{n+1} &= b + h, x_{n+2} = b + 2h, x_{n+3} = b + 3h. \end{aligned}$$

Os polinómios segmentados

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in ]x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in ]x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{nos restantes casos} \end{cases}$$

em que  $i = -1, \dots, n + 1$ , são designadas por funções spline-B.

**Teorema 2.32** As funções  $B_i$ ,  $i = -1, \dots, n + 1$ , são tais que  $B_i \in C^2([a, b])$  e

	...	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	...
$B_i$	0	0	1	4	1	0	0
$B'_i$	0	0	$3/h$	0	$-3/h$	0	0
$B''_i$	0	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0	0

**Demonstração:** Fica ao cuidado do aluno.  $\square$

O espaço gerado pelas funções  $B_i$ ,  $i = -1, \dots, n+1$ , será denotado por  $\mathcal{B}_3(\Delta)$ . Este espaço é constituído por polinómios do tipo

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} C_i B_i(x),$$

em que  $C_s$  denotam constantes, e portanto as funções de  $\mathcal{B}_3(\Delta)$  são polinómios segmentados cúbicos e que têm no intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  a seguinte expressão

$$S(x) = C_{i-1}B_{i-1}(x) + C_i B_i(x) + C_{i+1}B_{i+1}(x) + C_{i+2}B_{i+2}(x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{1}{h^3} [C_{i-1}(x_{i+1} - x)^3 \\ & + C_i(h^3 + 3h(x_{i+1} - x)^2 + 3h^2(x_{i+1} - x) - 3(x_{i+1} - x)^3) \\ & + C_{i+1}(h^3 + 3h(x - x_i)^2 + 3h^2(x - x_i) - 3(x - x_i)^3) \\ & + C_{i+2}(x - x_i)^3]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pretendemos determinar um polinómio em  $\mathcal{B}_3(\Delta)$  que seja interpolador para a função  $f$  nos pontos da partição. Este polinómio é designado *spline* cúbico interpolador. Começemos por notar que as condições de interpolação  $S(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , para a determinação das constantes que definem o *spline* cúbico interpolador são  $n+1$  e portanto necessitamos de mais duas condições. No resultado seguinte estão especificadas duas condições que permitem definir o *spline* cúbico interpolador.

**Teorema 2.33** *Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  onde considerado  $n+1$  pontos igualmente distanciados  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , em que  $x_i = x_{i-1} + h$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_0 = a$ ,  $h = (b - a)/n$ . Seja  $\mathcal{B}$  o espaço gerado pelos splines cúbicos  $B_i$ ,  $i = -1, \dots, n+1$ . Dados  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $f'(a)$  e  $f'(b)$  existe um e um só polinómio  $S(x)$  em  $\mathcal{B}$  que satisfaz a*

$$S(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n, \quad S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b). \tag{2.21}$$

**Demonstração:** O polinómio *spline* cúbico interpolador pertence a  $\mathcal{B}$  e portanto existem constantes  $c_j$ ,  $j = -1, \dots, n+1$ , tais

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} C_j B_j(x).$$

Estas constantes  $C_j$  são determinadas atendendo às condições (2.21). De facto, atendendo a estas condições temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \sum_{j=-1}^{n+1} C_j B'_j(x_0) \\ f(x_i) &= \sum_{j=-1}^{n+1} C_j B_j(x_i), \quad i = 0, \dots, n \\ f'(b) &= \sum_{j=-1}^{n+1} C_j B'_j(x_b). \end{aligned}$$

Atendendo às propriedades dos *splines* cúbicos, o sistema anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} f'(a) &= B'_{-1}(x_0)C_0 + B'_0(x_0)C_0 + B'_1(x_0)C_1 \\ f(x_i) &= B_{i-1}(x_i)C_{i-1} + B_i(x_i)C_i + B_{i+1}(x_i)C_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n \\ f'(b) &= B'_{n-1}(x_n)C_{n-1} + B'_n(x_n)C_n + B'_{n+1}(x_n)C_{n+1}, \end{aligned}$$

ou ainda, a

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{3}{h}C_0 + 0C_0 + \frac{3}{h}C_1 \\ f(x_i) &= 1C_{i-1} + 4C_i + 1C_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n \\ f'(b) &= -\frac{3}{h}C_{n-1} + 0C_n + \frac{3}{h}C_{n+1}. \end{aligned}$$

Uma vez que a matriz do sistema

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{3}{h} & 0 & \frac{3}{h} \end{bmatrix},$$

é não singular concluímos que existe um e um só *spline* cúbico interpolador que verifica as condições (2.21).  $\square$

A determinação o *spline* cúbico que verifica as condições (2.21) é feita resolvendo o sistema  $\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{F}$  em que  $\mathbf{B}$  está definida na demonstração do teorema anterior e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \\ C_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f'(a) \\ f(a) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(b) \\ f'(b) \end{bmatrix}.$$

O *spline* cúbico  $S(x)$  é interpolador para  $f$  nos pontos da partição e ainda interpola  $f'$  nos extremos do intervalo. Conhecidos os coeficientes do *spline* cúbico interpolador ficamos com  $S(x)$  determinado nos intervalos da partição e em  $[x_i, x_{i+1}]$  temos que  $S(x)$  é dado por (2.20).

**Exemplo 2.34** Determine o *spline* cúbico para a função  $f$  dada pela tabela

$x_i$	2.2	2.4	2.6
$f(x_i)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306
$f'(x_i)$	-0014878		-0.1883635

**Resolução:** Consideremos os pontos auxiliares  $x_{-1} = 2, x_{-2} = 1.8, x_3 = 2.8, x_4 = 3$ , e sejam  $B_i(x), i = -1, \dots, 3$ , os *splines* cúbicos. O sistema que permite determinar os coeficientes do *spline* cúbico interpolador

$$S(x) = C_{-1}B_{-1}(x) + C_0B_0(x) + C_1B_1(x) + C_2B_2(x) + C_3B_3(x)$$

é

$$\begin{bmatrix} -15 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.014878 \\ 0.5207843 \\ 0.5104147 \\ 0.4813306 \\ -0.1883635 \end{bmatrix},$$

que tem por solução

$$C_{-1} = 0.0856896, C_0 = 0.087376, C_1 = 0.0855905, C_2 = 0.0806768, C_3 = 0.0730329.$$

Em [2.2, 2.4] temos

$$\begin{aligned} S(x) &= (0.0856896(2.4 - x)^3 + 0.087376(0.2^3 + 3 \times 0.2^2(2.4 - x) \\ &+ 3 \times 0.2(2.4 - x)^2 - 3(2.4 - x)^3)0.0855905(0.2^3 + 3 \times 0.2^2(x - 2.2) \\ &+ 3 \times 0.2(x - 2.2)^2 - 3(x - 2.2)^3) + 0.0806768(x - 2.2)^3)/0.2^3 \\ &= -1.19371 + 1.76806x - 0.543945x^2 + 0.0429625x^3. \end{aligned}$$

e em [2.4, 2.6]

$$\begin{aligned} S(x) &= (0.087376(2.6 - x)^3 + 0.0855905(0.2^3 + 3 \times 0.2^2(2.6 - x) \\ &+ 3 \times 0.2(2.6 - x)^2 - 3(2.6 - x)^3) + 0.0806768(0.2^3 + 3 \times 0.2^2(x - 2.4) \\ &+ 3 \times 0.2(x - 2.4)^2 - 3(x - 2.4)^3) + 0.0730329(x - 2.4)^3)/0.2^3 \\ &= -1.28754 + 1.88534x - 0.592815x^2 + 0.04975x^3. \end{aligned}$$

O *spline* cúbico interpolador, é, como vimos, deduzido exigindo que este polinómio seja interpolador da função em todos os pontos da partição e que seja interpolador da derivada nos extremos do intervalo. Estas duas últimas condições permitiram construir o *spline* cúbico interpolador e podem ser substituídas por condições na segunda derivada do polinómio interpolador. No teorema seguinte é estabelecida a existência de *spline* interpolador que interpola a função e a sua segunda derivada nos extremos do intervalo. Este polinómio interpolador é designado *spline* cúbico natural. Se admitirmos as seguintes condições  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  então este *spline* é designado *spline* cúbico livre.

**Teorema 2.35** *Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  onde considerado  $n+1$  pontos igualmente distanciados  $x_i, i = 0, \dots, n$ , em que  $x_i = x_{i-1} + h, i = 1, \dots, n, x_0 = a, h = (b - a)/n$ . Seja  $\mathcal{B}$  o espaço gerado pelos splines cúbicos  $B_i, i = -1, \dots, n+1$ . Dados  $f(x_i), i = 0, \dots, n, f''(a)$  e  $f''(b)$  existe um e um só polinómio  $S(x)$  em  $\mathcal{B}$  que satisfaz a*

$$S(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n, \quad S''(a) = f''(a), S''(b) = f''(b). \quad (2.22)$$

A demonstração do teorema anterior é análoga à do Teorema 2.33. Notamos que a matriz que permite determinar os coeficientes do *spline* cúbico interpolador  $S(x)$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \\ C_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f''(a) \\ f(a) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(b) \\ f''(b) \end{bmatrix}.$$

### 2.5.3 Estudo do erro

O *spline* cúbico interpolador de uma função coincide com a função nos pontos da partição e a sua derivada coincide com a derivada da função nos extremos do intervalo de partição. No resultado seguinte, estabelecido sem demonstração, é apresentado o comportamento do erro que se comete ao aproximar uma função pelo seu *spline* cúbico interpolador.

**Teorema 2.36** *Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  onde considerado  $n+1$  pontos igualmente distanciados  $x_i, i = 0, \dots, n$ , em que  $x_i = x_{i-1} + h, i = 1, \dots, n, x_0 = a, h = (b - a)/n$ . O erro cometido ao aproximar  $f$  pelo seu *spline* cúbico interpolador verifica a*

$$\|S - f\|_{\infty} \leq \frac{5}{384} \|f^{(4)}\|_{\infty} h^4.$$

### 2.5.4 Exercícios

**Exercício 2.5.1** A estrela  $S$  da Ursa Maior apresenta uma variação para a sua magnitude aparente  $m$ , em função do ângulo de fase  $\theta$  (em graus), de acordo com os dados da seguinte tabela:

$\theta$	-60	-20	20
$m$	9.40	11.39	10.84

Usando um *spline* cúbico livre, determine uma aproximação para o ângulo de fase pertencente ao intervalo  $[-20, 20]$  em que a magnitude aparente da estrela é máxima.

**Exercício 2.5.2** Pretende-se interpolar a função  $f$  definida por  $f(x) = \ln x$ , com  $x \in [2, 2.5]$ , por um *spline* cúbico completo  $S$  numa malha uniforme.

1. Calcule o número mínimo de pontos a usar para garantir que  $\|f - S\|_{\infty} \leq 0.5 \times 10^{-4}$ .
2. Determine uma aproximação para  $f(2.3)$  usando o *spline* cúbico completo interpolador de  $f$  nos pontos obtidos na alínea anterior.

**Exercício 2.5.3** Deslocando-se um receptor de GPS num veículo ao longo do eixo de uma estrada, em Angola, obtiveram-se as coordenadas locais:

latitude $\phi$	26' 56".1	26' 50".4	27' 02".7	26' 58".3
longitude $\lambda$	5' 36"	5' 56"	6' 16"	6' 36"

Aproximando o eixo da estrada por um *spline* natural determine:

1. a latitude da estrada quando a longitude é  $\lambda = 6'$ ;
2. as coordenadas da estrada no ponto mais perto do equador, supondo que isso acontece entre 6' 16" e 6' 36" de longitude.

**Exercício 2.5.4** 1. Usando um *spline* cúbico livre, determine uma aproximação para a declinação aparente de Vénus para o dia 9 de Maio de 1999, às 18h30m45s, a partir das Efemérides Astronómicas (onde está tabelada para cada dia, às zero horas)

dia	8	9	10
$\delta_i$	+6°22'25".20	+6°52'54".57	+6°23'14".96

2. A partir da função obtida na alínea anterior, determine uma aproximação para o instante em que a declinação aparente de Vénus no dia 9 de Maio de 1999 foi máxima.

**Exercício 2.5.5** Um carro percorre uma rua, em linha recta, tendo sido efectuados os seguintes registos:

tempo ( $t$ ) em segundos	0	5	10
distância ( $d$ ) em metros	0	90	150
velocidade ( $v$ ) em km/hora	40		40

Usando o *spline* cúbico completo interpolador da função distância nos pontos dados, indique, justificando, uma aproximação para:

1. o primeiro instante em que o carro excedeu o limite de velocidade permitido dentro das localidades;
2. o instante em que o carro atingiu a velocidade máxima nos primeiros 5 segundos.

## 2.6 Derivação numérica

Acontece frequentemente sermos confrontados com a necessidade de determinar valores da derivada de uma função num conjunto de pontos conhecendo o valor da função apenas nesses pontos. Na impossibilidade de obter esses valores de forma exacta, vamos considerar a sua aproximação através do valor da derivada do polinómio interpolador da função nos referidos pontos.

Para o estudo que iremos efetuar nesta secção, consideremos uma função  $f \in C^{n+1}([a, b])$  conhecida num conjunto de pontos da partição uniforme

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (2.23)$$

com  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### 2.6.1 Aproximação da primeira derivada

Queremos aproximar a derivada de  $f$  num dos pontos  $x_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , da partição (2.23). Usando a fórmula interpoladora de Lagrange temos que, para  $x \in ]a, b[$ ,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x),$$

sendo  $\ell_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , os polinómios de Lagrange dados por (2.5),  $w$  a função dada por (2.8) e  $\xi \in ]a, b[$  um valor que depende de  $x$ . Derivando esta expressão obtemos

$$f'(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell'_i(x) + \left( \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x) \right)'$$

Podemos, assim, considerar a aproximação

$$f'(x) \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell'_i(x),$$

com erro dado por

$$e(x) := \left( \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x) \right)' = \frac{(f^{(n+1)}(\xi))'}{(n+1)!} w(x) + \frac{w'(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Ora, como se sabe,

$$w'(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \prod_{j=0, j \neq l}^{n-1} (x - x_j);$$

a dificuldade reside no cálculo de  $(f^{(n+1)}(\xi))'$ , uma vez que  $\xi$  depende de  $x$ . No entanto, para um ponto  $x = x_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , da partição (2.23) temos que  $w(x_k) = 0$  e como tal

$$f'(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell'_i(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w'(x_k), \quad (2.24)$$

Como  $x_k - x_j = (k - j)h$  temos que a fórmula que nos permite aproximar a derivada é

$$f'(x_k) \approx \sum_{i=0}^n f(x_k + (i - k)h) \ell'_i(x_k), \quad (2.25)$$

e o erro cometido é dado por

$$e(x_k) = h^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{n-1} \prod_{j=0, j \neq l}^{n-1} (k - j).$$

Podemos então concluir que

$$|e(x_k)| \leq C_{n+1} h^n,$$

onde  $C_{n+1}$  é um valor que não depende de  $h$ . Por este facto dizemos que a fórmula usada para aproximar a derivada da função é de ordem  $n$ . É também usual usar a notação  $e(x_k) = \mathcal{O}(h^n)$ .

**Observação 2.37** *Se existir uma constante positiva  $C$  tal que*

$$C_{n+1} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*concluimos que o aumento do número de pontos de interpolação implica uma diminuição do erro cometido na aproximação (2.25).*

Atendendo a que, pela fórmula interpoladora de Newton das diferenças progressivas, o polinómio interpolador de  $f$  nos pontos da partição (2.23) é dado por

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i f(x_0)}{i! h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

resulta que a fórmula (2.25) pode ser escrita na forma (prove)

$$f'(x_k) \approx \sum_{i=0}^n \frac{\Delta^i f(x_0)}{i! h} \left( \sum_{l=0}^{i-1} \prod_{j=0, j \neq l}^{i-1} (k - j) \right). \quad (2.26)$$

A fórmula de diferenças finitas (2.26), convenhamos, não é nada simpática. Vamos particulariza-la deduzindo vários fórmulas de diferenças finitas para aproximar a derivada de uma função  $f$ .

### Fórmulas com dois pontos

Usando a fórmula interpoladora de Newton temos que, para  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ ,

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{h} (x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1}), \quad \xi \in ]x_k, x_{k+1}[.$$

Derivando sai que

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{h} - h \frac{f''(\xi)}{2}, \quad \xi \in ]x_k, x_{k+1}[,$$

e

$$f'(x_{k+1}) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{h} + h \frac{f''(\xi)}{2} \quad \xi \in ]x_k, x_{k+1}[.$$

Obtemos assim duas fórmulas de diferenças finitas de primeira ordem para aproximar a primeira derivada de uma função num ponto. A

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{h}$$

é usual chamar fórmula de diferenças progressivas e a

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{h}$$

costuma chamar-se fórmula de diferenças regressivas.

### Fórmulas com três pontos

Para obter fórmulas mais precisas para aproximar a primeira derivada de uma função num ponto, vamos considerar fórmulas com mais pontos. As fórmulas de diferenças progressivas, centradas e regressivas com três pontos são as seguintes:

1.  $f'(x_k) = \frac{1}{2h} [-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0)$ ;
2.  $f'(x_k) = \frac{1}{2h} [-f(x_{k-1}) + f(x_{k+1})] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)$ ;
3.  $f'(x_k) = \frac{1}{2h} [f(x_{k-2}) - 4f(x_{k-1}) + 3f(x_k)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2)$ ;

Vamos só deduzir a segunda fórmula. Assim, temos que

$$f(x) = f(x_{k-1}) + \frac{\Delta f(x_{k-1})}{h}(x - x_{k-1}) + \frac{\Delta^2 f(x_{k-1})}{2h^2}(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}), \quad \xi_1 \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

Derivando sai que

$$f'(x_k) = \frac{\Delta f(x_{k-1})}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{k-1})}{2h^2} [(x_k - x_{k-1}) + (x_k - x_k)] + \frac{f'''(\xi_1)}{6} (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}), \quad \xi_1 \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

Atendendo a que

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
$x_{k-1}$	$f(x_{k-1})$		
		$f(x_k) - f(x_{k-1})$	
$x_k$	$f(x_k)$		$f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})$
		$f(x_{k+1}) - f(x_k)$	
$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$		

temos

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} + \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))}{2h} - h^2 \frac{f'''(\xi_1)}{6},$$

com  $\xi_1 \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[$ , ou seja

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h} [-f(x_{k-1}) + f(x_{k+1})] - h^2 \frac{f'''(\xi)}{6}, \quad \xi_1 \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

**Exemplo 2.38** Considere os seguintes valores da função  $f(x) = xe^x$ :

$x_i$	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x_i)$	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

Aproxime o valor de  $f'(2.0) = 22.167168$  usando as fórmulas de diferenças finitas dadas no exercício anterior e compare os erros cometidos.

**Resolução:** Vamos considerar as três fórmulas separadamente.

- Fórmula progressiva de segunda ordem com  $h = 0.1$ .

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.2}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.032310.$$

O erro cometido é aproximadamente  $1.35 \times 10^{-1}$ .

- Fórmula regressiva de segunda ordem com  $h = 0.1$ .

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.2}[f(1.8) - 4f(1.9) + 3f(2.0)] = 22.054525.$$

O erro cometido é aproximadamente  $1.13 \times 10^{-1}$ .

- Fórmula centrada de segunda ordem com  $h = 0.1$ .

$$f'(2.0) \approx \frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] = 22.228790.$$

O erro cometido é aproximadamente  $-6.16 \times 10^{-2}$ .

Note-se que o erro cometido quando se usa a fórmula de diferenças centradas.

## 2.6.2 Aproximação da segunda derivada. Algumas fórmulas

Queremos aproximar a segunda derivada de  $f$  num dos pontos  $x_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , da partição (2.23). Poderíamos, tal como para a primeira derivada, usar o polinômio interpolador na dedução das fórmulas para a segunda derivada. A obtenção de estimativas para o erro é, no entanto, mais complicada. Um processo alternativo para a dedução das fórmulas de derivação (e respectivo erro) faz uso da série de Taylor da função.

Desenvolvendo  $f$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_k$  temos:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{h^2}{2}f''(x_k) + \frac{h^3}{6}f'''(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in ]x_k, x_{k+1}[;$$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{h^2}{2}f''(x_k) - \frac{h^3}{6}f'''(x_k) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in ]x_{k-1}, x_k[.$$

Se adicionarmos estas duas expressões obtemos

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}[f(x_{k-1}) - 2f(x_k) + f(x_{k+1})] - \frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Admitindo que  $f^{(4)}$  é contínua em  $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ , o Teorema de Bolzano permite concluir que existe um  $\xi \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[$  tal que

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Assim

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}[f(x_{k-1}) - 2f(x_k) + f(x_{k+1})] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi). \quad (2.27)$$

Esta fórmula é conhecida como fórmula de diferenças centradas de segunda ordem para aproximar a segunda derivada. Por um raciocínio semelhante poderiam ser obtidas outras fórmulas de diferenças finitas para aproximar a segunda derivada, não só centradas como também progressivas e regressivas.

**Exemplo 2.39** Considere, de novo, os valores da função  $f(x) = xe^x$  dados na tabela do Exercício 2.38. Aproxime o valor de  $f''(2.0) = 29.556224$  usando a fórmula de diferenças finitas centradas de segunda ordem.

**Resolução:** Temos que

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.01}[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200.$$

O erro cometido é aproximadamente  $-3.7 \times 10^{-2}$ .

### 2.6.3 Aproximação de derivadas de ordem superior

O estudo efectuado pode ser generalizado para obter fórmulas de diferenças finitas para aproximar derivadas de ordem superior. Essas fórmulas podem ser obtidas quer por interpolação quer recorrendo à série de Taylor. Um algoritmo para obter fórmulas de diferenças finitas de qualquer ordem para aproximar qualquer derivada de uma função pode ser visto em Fornberg (1988).

### 2.6.4 Exercícios

**Exercício 2.6.1** Elabore um algoritmo que permita obter o valor aproximado da primeira derivada de uma função num ponto à custa da fórmula 2.26.

**Exercício 2.6.2** Num circuito eléctrico com voltagem aplicada  $E(t)$  e indutância  $L$ , a primeira Lei de Kirchoff dá-nos a relação

$$E(t) = LI'(t) + RI(t),$$

onde  $R$  é a resistência no circuito e  $I(t)$  a corrente no instante  $t$ . Suponhamos que medimos a corrente para vários valores de  $t = t_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , obtendo

$t_i$	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
$I(t_i)$	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

onde tempo é medido em segundos, a corrente em amperes, a indutância é uma constante dada por  $L = 0.98$  henries e a resistência é 0.142 ohms. Aproxime a voltagem  $E$  nos valores de  $t$  dados na tabela.

**Exercício 2.6.3** Mostre, a partir do polinómio interpolador de Lagrange da função  $f$  nos pontos  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$ , tais que  $x_1 - x_0 = h$  e  $x_2 - x_1 = \alpha h$ , que

$$f''(x) \approx \frac{2}{h^2} \left[ \frac{f(x_0)}{1+\alpha} - \frac{f(x_1)}{\alpha} + \frac{f(x_2)}{\alpha(1+\alpha)} \right].$$

Verifique que quando  $\alpha = 1$  se recupera a fórmula das diferenças centradas.

**Exercício 2.6.4** Prove que

$$f''(x_k) = \frac{1}{12h^2} [-f(x_{k-2}) + 16f(x_{k-1}) - 30f(x_k) + 16f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})] + \frac{h^4}{90} f^{(4)}(\xi),$$

com  $\xi \in (x_{k-2}, x_{k+2})$ .

**Exercício 2.6.5** Prove que:

- $f'''(x_k) = \frac{1}{2h^3} [-f(x_{k-2}) + 2f(x_{k-1}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})] - \frac{h^2}{4} f^{(5)}(\xi_1);$
- $f^{(4)}(x_k) = \frac{1}{h^4} [f(x_{k-2}) - 4f(x_{k-1}) + 6f(x_k) - 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})] - \frac{h^2}{6} f^{(6)}(\xi_2).$