# Capítulo 3

# Interpolação de funções definidas em $\mathbb{R}^2$

## 3.1 Introdução

No capítulo anterior tratámos o problema de interpolação para uma função definida num intervalo real e considerámos vários tipos de aproximações dependentes do tipo de regularidade desejada para o polinómio. Neste capítulo iremos considerar a determinação de um polinómio de duas variáveis que seja interpolador de uma função conhecida num conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$.

Seja $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. No intervalo $[a,b]$ consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

e em $[c,d]$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < x_{n-1} < x_m = d.$$

As duas partições anteriores induzem em $\Omega$ o seguinte conjunto de pontos

$$\{(x_i, y_j), i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m\}, \tag{3.1}$$

que designamos rede rectangular.

Seja $f$ uma função definida em $\Omega$ e suponhamos que $f$ é conhecida nos pontos da rede rectangular definida. O nosso objectivo é determinar um polinómio $P$ de duas variáveis que verifique as condições

$$P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \qquad i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m.$$

## 3.2 Polinómio interpolador de Lagrange

Por polinómio em $x$ e $y$ queremos designar uma função do tipo

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} x^i y^j, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

As condições a que o polinómio $P$ deve verificar são $(n+1) \times (m+1)$ e portanto se pensarmos num polinómio em $x$ e $y$ que permite resolver o problema anterior ele poderá apresentar $(n+1) \times (m+1)$ coeficientes.

Consideremos as funções $\ell_i(x)$ e $\ell_j(y)$ definidas considerando as partições em $[a,b]$ e $[c,d]$. Com estas funções definamos $\ell_{ij}(x,y) = \ell_i(x)\ell_j(y)$, $i = 0, \ldots, n$ $j = 0, \ldots, m$, que verificam a

$$\ell_{ij}(x_k, y_t) = \delta_{kt} = \begin{cases} 1 & k = t \\ 0 & k \neq t \end{cases} .$$

O papel desempenhados por estas funções é análogo ao das funções da base canónica considerada quando introduzimos o polinómio interpolador de Lagrange para uma função definida num intervalo real. Consideremos o seguinte polinómio de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x_i,y_j)\ell_{ij}(x,y) \\
&= f(x_0,y_0) + f(x_1,y_0)\ell_1(x) + \ldots + f(x_n,y_0)\ell_n(x) \\
&+ f(x_0,y_1)\ell_1(y) + f(x_1,y_1)\ell_1(x)\ell_1(y) + \ldots + f(x_n,y_1)\ell_n(x)\ell_1(y) \\
&+ \ldots + f(x_0,y_m)\ell_m(y) + f(x_1,y_m)\ell_1(x)\ell_m(y) + \ldots + f(x_n,y_m)\ell_n(x)\ell_m(y)\ (x,y)\in\Omega.
\end{aligned}$$

Atendendo às propriedades das funções $\ell_{ij}(x,y)$, o polinómio $P(x,y)$ satisfaz a

$$P(x_k,y_t) = f(x_k,y_t),$$

e, além disso, é o único polinómio de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$ que resolve o problema de interpolação que nos proposemos resolver. De facto, seja

$$Q(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}x^i y^j$$

um polióimio de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$ que verifica a $Q(x_i,y_j) = f(x_i,y_j)$. Fixemos $y_t$ na partição de $[c,d]$ e consideremos o polinómio em $x$

$$Q(x,y_t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}x^i y_t^j = \sum_{i=0}^{n} q_{it}x^i$$

em que

$$q_{it} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}y_t^j.$$

Atendendo às condições para $Q$, os coeficientes deste polinómio devem satisfazer a

$$\sum_{i=0}^{n} q_{it}x_k^i = f(x_k,y_t), \qquad k = 0,\ldots,n,$$

isto é, o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{0t} \\ q_{1t} \\ q_{2t} \\ \vdots \\ q_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0,y_t) \\ f(x_1,y_t) \\ f(x_2,y_t) \\ \vdots \\ f(x_n,y_t) \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que este sistema é possível e determinado, existe para cada $t$, uma única solução $q_{it}, i = 0,\ldots,n$.

Finalmente, para os coeficientes $b_{ij}$ e para cada $i = 0,\ldots,n$, temos o seguinte sistema

$$\sum_{j=0}^{n} b_{ij}y_t^j = q_{it}, \qquad t = 0,\ldots,m,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & y_0^3 & \ldots & y_0^m \\ 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & \ldots & y_1^m \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 & \ldots & y_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_m & y_m^2 & y_m^3 & \ldots & y_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i0} \\ b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{i0} \\ q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{im} \end{bmatrix},$$

que é também um sistema possível e determinado. Provámos deste modo a unicidade do polinómio interpolador $P(x,y)$. Este polinómio é designado polinómio interpolador de Lagange. Provámos então o seguinte teorema.

**Teorema 3.1** *Seja $f$ uma função definida no rectângulo $\Omega = [a,b] \times [c,b]$ onde consideramos a rede rectangular $\{(x_i,y_j), i = 0,\ldots,n, j = 0,\ldots,m\}$. Dados $f(x_i,y_j), i = 0,\ldots,n, j = 0,\ldots,m$, o único polinómio $P(x,y)$ de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$ que verifica $P(x_i,y_j) = f(x_i,y_j)$, $i = 0,\ldots,n$, $j = 0,\ldots,m$, é o polinómio interpolador de Lagrange*

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x_i,y_j)\ell_{ij}(x,y).$$

**Exemplo 3.2** Consideremos a função $f(x,y) = \exp -(x^2+y^2)$ com $(x,y) \in [-2,2]x[-2,2]$. Considere o rectângulo $[0,0.1] \times [0,0.12]$. Em cada um dos intervalos $[0,0.1]$ e $[0,0.12]$ definamos as partiçõess de pontos igualmente distanciados e de espaçamentos, respectivamente, $h = 0.05$ e $k = 0.04$. Utilizando a rede rectangular induzida no rectngulo $[0,0.1]\times[0,0.12]$ pelas partições anteriores definamos o polinómio interpolador de Lagrange de grau $2$ em $x$ e $3$ em $y$,

$$\begin{aligned}
P(x,y) \quad = \quad & \Big(f(0,0)\frac{(x-0.05)(x-0.1)}{0.005} + f(0.05,0)\frac{x(x-0.1)}{-0.0025} \\
& + f(0.1,0)\frac{(x-0.05)x}{0.0025}\Big)\frac{(y-0.04)(y-0.08)(y-0.12)}{-0.000384} \\
& + \Big(f(0,0.04)\frac{(x-0.05)(x-0.1)}{0.005} + f(0.05,0.04)\frac{x(x-0.1)}{-0.0025} \\
& + f(0.1,0.04)\frac{(x-0.05)x}{0.0025}\Big)\frac{y(y-0.08)(y-0.12)}{0.000128} \\
& + \Big(f(0,0.08)\frac{(x-0.05)(x-0.1)}{0.005} + f(0.05,0.08)\frac{x(x-0.1)}{-0.0025} \\
& + f(0.1,0.08)\frac{(x-0.05)x}{0.0025}\Big)\frac{y(y-0.04)(y-0.12)}{-0.000128} \\
& + \Big(f(0,0.12)\frac{(x-0.05)(x-0.1)}{0.005} + f(0.05,0.12)\frac{x(x-0.1)}{-0.0025} \\
& + f(0.1,0.12)\frac{(x-0.05)x}{0.0025}\Big)\frac{y(y-0.08)(y-0.04)}{-0.000384}
\end{aligned}$$

Estimemos seguidamente o erro cometido ao aproximar uma função $f$ definida em $[a,b]\times[c,d]$ pelo seu polinómio interpolador de Lagrange. Em $[a,b]\times[c,d]$ consideremos a rede rectangular (3.1) e sejam

$$h_x = \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}), \qquad h_y = \max_{j=1,\ldots,m}(y_j - y_{j-1}).$$

Seja $p(x,y)$ o polinómio interpolador de Lagrange de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$ que é interpolador de $f$ na rede rectangular anterior. O nosso objectivo é determinar uma estimativa para

$$\|f-P\|_\infty = \max_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} |f(x,y) - p(x,y)|.$$

Notemos que

$$\|f-P\|_\infty \leqslant \|f-\tilde{P}\|_\infty + \|\tilde{P}-P\|_\infty, \tag{3.2}$$

em que

$$\tilde{P}(x,y) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i,y)\ell_i(x).$$

Então,

$$f(x,y)-\tilde{P}(x,y)=\frac{\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(\eta,y)}{4(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

e portanto

$$\|f-\tilde{P}\|_\infty\leqslant\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}\right\|_\infty.$$

Relativamente à segunda parcela do segundo membro de (3.2), notamos que

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(x,y)-P(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}(f(x_i,y)-\sum_{j=0}^{m}f(x_i,y_j)\ell_j(y))\ell_i(x)\\
&= \frac{1}{4(m+1)!}\prod_{j=0}^{m}(y-y_j)\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^{m+1}f}{\partial y^{m+1}}(x_i,\eta_2)\ell_i(x)\\
&= \frac{1}{4(m+1)!}\prod_{j=0}^{m}(y-y_j)\left[\frac{\partial^{m+1}f}{\partial y^{m+1}}(x_i,\eta_2)+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^{m+1}f}{\partial y^{m+1}}(x_i,\eta_2)\ell_i(x)\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial^{m+1}f}{\partial y^{m+1}}(x_i,\eta_2)\right]\\
&= \frac{1}{4(m+1)!}\prod_{j=0}^{m}(y-y_j)\left[\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}(x_i,\eta_2)+\frac{1}{4(n+1)!}\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}(\eta_1,\eta_2)\right]
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\|\tilde{P}-P\|_\infty\leqslant\frac{h_y^{m+1}}{4(m+1)}\left[\left\|\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\right\|_\infty+\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}\right\|_\infty\right]$$

Substituindo em (3.2) obtemos

$$\|f-P\|_\infty\leqslant\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}\right\|_\infty+\frac{h_y^{m+1}}{4(m+1)}\left[\left\|\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\right\|_\infty+\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}\right\|_\infty\right].$$

Provámos o seguinte teorema.

**Teorema 3.3** *Seja $f$ uma função que tem, em $[a,b]\times[c,d]$, as seguintes derivadas parciais contínuas*

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}},\ \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}},\ \frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}.$$

*Em $[a,b]\times[c,d]$ consideremos a rede rectangular (3.1) e sejam*

$$h_x=\max_{i=1,\ldots,n}(x_i-x_{i-1}),\quad h_y=\max_{j=1,\ldots,m}(y_j-y_{j-1}).$$

*Se $P(x,y)$ é o polinómio inetrpolador de Lagrange de grau $n$ em $x$ e $m$ em $y$ que verifica*

$$P(x_i,y_j)=f(x_i,y_j),\qquad i=0,\ldots,n, j=0,\ldots,m,$$

*então*

$$\|f-P\|_\infty\leqslant\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}\right\|_\infty+\frac{h_y^{m+1}}{4(m+1)}\left[\left\|\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\right\|_\infty+\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}\right\|_\infty\right].$$

## 3.3 Interpolação de Lagrange segmentada

A interpolação de funções de duas variáveis, tal como para funções de uma variável real, é particularmente vantajosa quando é feita considerando polinómios de grau baixo. De modo análogo ao caso de funções de uma variável, o polinómio interpolador de Lagrange para funções de duas variáveis pode ser considerado por "segmentos", isto é, com expressões diferentes em subrectangulos do domínio $[a,b] \times [c,d]$, surgindo de modo natural o chamado polinómio de Lagrange segmentado.

Consideremos em $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ a rede rectangular (3.1) em que $n$ e $m$ são divisíveis, respectivamente, por $n_1$ e $m_1$. Seja $f$ uma função definida em $\Omega$ e suponhamos que conhecemos $f(x_i, y_j), i = 0, \ldots, j = 0, \ldots, m$. Chamamos polinómio interpolador de Lagrange segmentado de grau $n_1$ em $x$ e $m_1$ em $y$ ao polinómio

$$S(x,y) = \begin{cases} P_{0,0}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_0, y_{m_1}] \\ P_{1,0}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_0, y_{m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ P_{\frac{n}{n_1}-1,0}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_0, y_{m_1}] \\ P_{0,1}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ P_{1,1}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ P_{\frac{n}{n_1}-1,1}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ P_{0,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_{m-m_1}, y_m] \\ P_{1,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_{m-m_1}, y_m] \\ \vdots & \vdots \\ P_{\frac{n}{n_1}-1,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_{m-m_1}, y_m] \end{cases},$$

em que $P_{i,j}$ é o polinómio de Lagrange de grau $n_1$ em $x$ e $m_1$ em $y$ para a rede rectangular do rectângulo $[x_{in_1}, x_{(i+1)n_1}] \times [y_{jm_1}, y_{(j+1)m_1}]$ para $i = 0, \ldots, \frac{n}{n_1} - 1$, $j = 0, \ldots, \frac{m}{m_1} - 1$.

**Exemplo 3.4** Considere a função $f$ definida num rectângulo $[a,b] \times [c,d]$ onde consideramos a rede rectangular $\{(x_i, y_j), i = 0, 1, 2, j = 0, 1\}$. Então o polinómio interpoalador de Lagrange segmentado linear em $x$ e em $y$ é dado por

$$S(x,y)=\begin{cases} \left(f(x_0,y_0)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1,y_0)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} & \\ +\left(f(x_0,y_1)\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1,y_1)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} & (x,y)\in[x_0,x_1[\times[y_0,y_1[, \\ \left(f(x_1,y_0)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+f(x_2,y_0)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1} & \\ +\left(f(x_1,y_1)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+f(x_2,y_1)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} & (x,y)\in[x_1,x_2]\times[y_0,y_1[, \\ \left(f(x_1,y_1)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+f(x_2,y_1)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} & \\ +\left(f(x_1,y_2)\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+f(x_2,y_2)\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} & (x,y)\in[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]. \end{cases}$$

A determinação de uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo seu polinómio interpolador de Lagrange segmentado é feita de modo análogo caso unidimensional.

Seja $S(x,y)$ o polinómio interpolador de Lagrange segmentado de grau $n_1$ em $x$ e $m_1$ em $y$ para uma função $f$ definida num rectângulo $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ onde consideramos a rede rectangular (3.1) em que $n$ e $m$ são divisiveis, respectivamente, por $n_1$ e $m_1$. Atendendo a que

$$\|f-S\|_\infty=\max_{i=0,\ldots,\frac{n}{n_1}-1,j=0,\ldots,\frac{m}{m_1}-1}\|f-P_{i,j}\|_\infty \tag{3.3}$$

e, pelo Teorema 3.3, vale a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned}\|f-P_{i,j}\|_\infty \leqslant\ & \frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}\right\|_{\infty,i,j}\\ &+\frac{h_y^{m+1}}{4(m+1)}\left[\left\|\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\right\|_{\infty,i,j}+\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}\right\|_{\infty,i,j}\right]\end{aligned}$$

Considerando a última desigualdade em (3.3) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|f-S\|_\infty \leqslant\ & \max_{i=0,\ldots,\frac{n}{n_1}-1,j=0,\ldots,\frac{m}{m_1}-1}\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}\right\|_{\infty,i,j}\\ &+\frac{h_y^{m+1}}{4(m+1)}\left[\left\|\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\right\|_{\infty,i,j}+\frac{h_x^{n+1}}{4(n+1)}\left\|\frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}\right\|_{\infty,i,j}\right]\end{aligned} \tag{3.4}$$

Demonstrámos o seguinte resultado.

**Teorema 3.5** *Seja $f$ uma função que tem, em $[a,b]\times[c,d]$, as seguintes derivadas parciais contínuas*

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}},\ \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}},\ \frac{\partial^{(m+1)(n+1)}f}{\partial x^{n+1}y^{m+1}}.$$

*Em $[a,b]\times[c,d]$ consideremos a rede rectangular (3.1) e sejam*

$$h_x=\max_{i=1,\ldots,n}(x_i-x_{i-1}),\qquad h_y=\max_{j=1,\ldots,m}(y_j-y_{j-1}).$$

*Se $S(x,y)$ é o polinómio interpolador de Lagrange segmentado de grau $n_1$ em $x$ e $m_1$ em $y$ para uma função $f$ em que $n$ e $m$ são divisíveis, respectivamente, por $n_1$ e $m_1$, então é válida a estimativa (3.4).*

## 3.4 O polinómio interpolador de Hermite

O polinómio interpolador de Lagrange é uma função contínua que coincide com a função e as suas derivadas parciais pode não coincidir com as correspondentes derivadas de $f$. O polinómio interpolador de Lagrange segmentado não tem, em geral, as derivadas parciais contínuas. Vamos generalizar o polinómio interpolador de Hermite estudado no caso unidimensional para funções de duas variáveis.

Seja $f$ uma função definida num rectângulo $[a,b]\times[c,d]$ onde consideramos uma rede rectangular (3.1). Suponhamos que conhecemos

$$f(x_i,y_j), \frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j), \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_j), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i,y_j)$$

nos pontos da rede rectangular. O polinómio

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x_i,y_j)h_i(x)h_j(y) \\ &+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j)\overline{h}_i(x)h_j(y) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_j)h_i(x)\overline{h}_j(y) \\ &+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i,y_j)\overline{h}_i(x)\overline{h}_j(y) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} h_i(x) &= [1-2(x-x_i)\ell_i'(x_i)]\ell_i(x)^2, \\ h_j(y) &= [1-2(y-y_j)\ell_j'(y_j)]\ell_j(y)^2, \\ \overline{h}_i(x) &= (x-x_i)\ell_i(x)^2, \\ \overline{h}_j(y) &= (y-y_j)\ell_j(y)^2, \end{aligned}$$

e

$$\ell_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \qquad \ell_j(y) = \prod_{k=0,k\neq i}^{m} \frac{y-y_k}{y_j-y_k},$$

é designado polinómio interpolador de Hermite de grau $2n+1$ em $x$ e $2m+1$ em $y$. Este polinómio verifica as seguintes propriedades, para $i=0,1,\ldots,n$ e $j=0,1,\ldots,m$:

$$\begin{aligned} H(x_i,y_j) &= f(x_i,y_j), \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x_i,y_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j), \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x_i,y_j) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_j), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y\partial x}(x_i,y_j) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_i,y_j). \end{aligned}$$

Tal como para o polinómio interpolador de Lagrange, o polinómio interpolador de Hermite pode ser considerado segmentado. Consideremos em $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ a rede rectangular (3.1) em que $n$ e $m$ são divisíveis, respectivamente, por $n_1$ e $m_1$. Seja $f$ uma função definida em $\Omega$ e suponhamos que conhecemos

$$f(x_i,y_j), \frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j), \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_j), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_i,y_j), \quad i=0,\ldots, \quad j=0,\ldots,m.$$

Chamamos polinómio interpolador de Hermite segmentado de grau $n_1$ em $x$ e $m_1$ em $y$ ao polinómio

$$S(x,y) = \begin{cases} H_{0,0}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_0, y_{m_1}] \\ H_{1,0}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_0, y_{m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ H_{\frac{n}{n_1}-1,0}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_0, y_{m_1}] \\ H_{0,1}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ H_{1,1}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ H_{\frac{n}{n_1}-1,1}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_{m_1}, y_{2m_1}] \\ \vdots & \vdots \\ H_{0,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_0, x_{n_1}] \times [y_{m-m_1}, y_m] \\ H_{1,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_{n_1}, x_{2n_1}] \times [y_{m-m_1}, y_m] \\ \vdots & \vdots \\ H_{\frac{n}{n_1}-1,\frac{m}{m_1}-1}(x,y) & x \in [x_{n-n_1}, x_n] \times [y_{m-m_1}, y_m] \end{cases},$$

em que $H_{i,j}$ é o polinómio interpolador de Hermite de grau $2n_1+1$ em $x$ e $2m_1+1$ em $y$ para a rede rectangular definida no rectângulo $[x_{in_1}, x_{(i+1)n_1}] \times [y_{jm_1}, y_{(j+1)m_1}]$ para $i = 0, \ldots, \frac{n}{n_1} - 1$,$j = 0, \ldots, \frac{m}{m_1} - 1$.