SPM

contacto

FOLHA INFORMATIVA DA DELEGAÇÃO REGIONAL DO CENTRO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

nº 2 setembro 1981

ABERTURA

REENCONTRO

O Encontro da Sociedade Portuguesa de Matemática já se tornou uma tradição da Zona Centro. Tem-se realizado anualmente, primeiro em Coimbra 1978, depois em Aveiro, em Viseu, e aí o temos à porta, outra vez. Vai ser o IV Encontro Regional, na Covilhã, depois das férias.

Um objectivo sempre presente das Direcções da Zona Centro tem sido a **descentralização.** *É uma coisa difícil. Fácil de aceitar e dizer, mas difícil de pôr em prática. Encontrarmo-nos em Coimbra é fácil e agrada a todos, ou quase todos: aos que vão lá ver e fazer o Encontro, porque muitos lá deixaram a saudade do seu primeiro integral; os de lá, por não terem que sair de casa; e as comissões organizadoras têm sucesso garantido — no fim de contas Coimbra é grande, atrai muita gente — e a Televisão até é capaz de aparecer...*

Pelas razões recíprocas, um Encontro no **interior** *é um bicho de sete cabeças. E é longe para mais de dois terços dos sócios. O trabalho de organização vem a dobrar, especialmente no que toca à propaganda e subsídios.*

Ora, nas bandas do mar as coisas vão sobre rodas e a quadratura do círculo vai sendo possível. No interior não somos muitos, por enquanto, mas é sobretudo aqui que temos de vir e ficar, é por aqui que vamos crescer. Descentralizar não pode ser, apenas, um desejo das Direcções Regionais: deve ser, também, um compromisso e uma aposta por parte de cada sócio. Os Encontros têm sido convívio, amizade, mas não só: temos trabalhado e discutido intensamente, antes, durante e depois. Vamos já pensar aonde será a seguir à próxima vez: Figueira? Guarda?

Em Viseu a coisa pareceu-nos exemplar, pela qualidade das sessões, pela quantidade dos participantes, pelas actividades sociais: houve um belo jantar, prendas, prova de vinhos e tudo.

Este ano é na Covilhã, na serra; para muitos será o levantar do pano para um novo ano de trabalho. Além de Matemática, vai haver discussão sobre os programas do 10º ao 12º. Vamos ver a Torre e a Cabeça do Velho.

Vai ser lá mesmo, no sítio do queijo. Não falte.

A Direcção da Delegação Regional do Centro da S.P.M.

NOTA SOBRE AS FUNÇÕES PERIÓDICAS

por

Carlos D. Gamas
*Manuel L. Esquivel**

Os pontos da circunferência unitária em $\mathbb{R}^2$ (fig. 1) podem ser parametrizados pela restrição ao intervalo $[0,1[$ da função de variável real $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \to (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, função contínua e periódica de período 1.

Seja x um real qualquer; visto que $x = x_1 + k$, com $x_1 \in [0,1[$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $E(x) = (\cos 2\pi x_1, \operatorname{sen} 2\pi x_1)$ é um ponto da circunferência unitária.

Façamos rodar esse ponto na circunferência unitária por saltos discretos de amplitude constante x, isto é, consideremos a sucessão de pontos da circunferência unitária $(E(nx))_{n \in \mathbb{N}}$. Então, juntando às propriedades da função E (regula-

(continua na pág. 6)

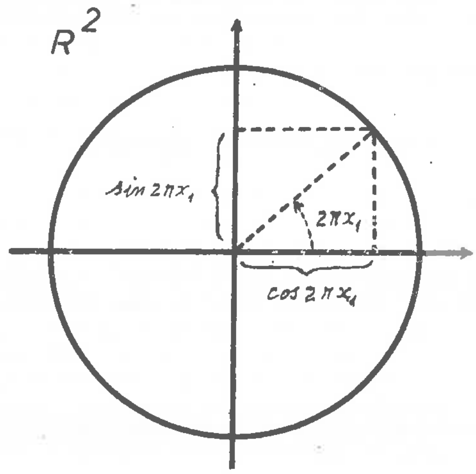

fig. 1

INFORMAÇÕES DIVERSAS

No ano lectivo passado, as Direcções Gerais do Ensino Secundário e do Ensino Básico mantiveram orientadores pedagógicos de formação em exercício de professores e de formação contínua, na Zona 3, que abrange parte do Distrito de Aveiro, e Distritos de Coimbra, Leiria e Castelo Branco. A equipa de apoio pedagógico, para esta zona, foi constituída pelos Dr. Amadeu de Matos Viegas, Dr.ª D. Adelaide Baganha, Dr. João Alves do Cimo e Dr. Duarte Gamas, no ensino preparatório; e pelo Dr. António Delgado, no ensino secundário.

Está projectada para o próximo ano escolar uma acção didáctica sobre Estatística Descritiva, dirigida em geral para professores do ensino secundário e do ensino preparatório.

o

Quando da sua estadia nos Açores (ver CONTACTO nº 1), o Dr. João David Vieira, da Universidade de Aveiro, fez, a convite do Grupo de Trabalho da S.P.M. (Ponta Delgada), um mini-curso (10h) sobre Topologia para professores do Ensino Secundário. As sessões tiveram lugar na E.S. Antero de Quental nos dias 22, 26 e 29 de Maio e 2 de Junho. No dia 9 de Junho orientou, a convite do mesmo Grupo de Trabalho, uma sessão destinada a professores do Ensino Secundário. Nessa sessão, em que estiveram presentes professores de Escolas de Nordeste, Ribeira Grande, Água de Pau e Ponta Delgada, foram abordados problemas relativos à reciclagem de professores, nomeadamente no referente à Matemática dita moderna, programas e manuais.

o

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

Este Congresso vai realizar-se em 1982, de 11 a 19 de Agosto, em Varsóvia, Polónia. CONTACTO prevê a possibilidade de organização de uma caravana de congressistas, a sair de Coimbra e a atingir Varsóvia paulatinamente. Dê parte da sua adesão a CONTACTO durante o ano de preparação.

Encontra-se, em Portugal, desde Junho, o Prof. José Manuel dos Santos Simões Pereira, titular de Matemática e Informática da City University of New York, nos Estados Unidos da América do Norte, e professor catedrático da Universidade de Coimbra, na situação de licença ilimitada.

Durante esta estadia, visitou a Universidade de Coimbra, para participar em actividades de investigação com colegas do Departamento de Matemática; e na Universidade de Aveiro tem proferido uma série de conferências sobre a Teoria de Matróides, Grafos e Matrizes.

Esta deslocação é feita ao abrigo do Senior Scientists Program da O.T.A.N., que visa o intercâmbio de cientistas entre os países membros.

o

Os Professores António Ribeiro Gomes e José António Pereira da Silva, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, permaneceram, de 28 de Junho a 7 de Julho passados, no *International Center for Theoretical Physics*, em Trieste, onde participaram, com físicos e matemáticos de mais trinta e sete países, numa conferência sobre Métodos Geométricos da Física Teórica.

o

O Grupo de Trabalho de Aveiro vai promover, na segunda quinzena de Setembro, em Vale de Cambra, Anadia, Ovar e Arouca, uma série de sessões sobre *Teoria dos Conjuntos e sua aplicação na Escola Primária*. A acção a desenvolver conta com o apoio do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e da Escola do Magistério Primário de Aveiro. Foi igualmente solicitado apoio à Direcção Geral do Ensino Básico.

Esta Secção precisa da colaboração dos sócios, para manter actualidade e ser registo abundante da vida das escolas e dos professores a elas ligados. Pede-se insistentemente a todos os sócios o envio de informações deste tipo para a Sociedade Portuguesa de Matemática - Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra - ou para qualquer dos elementos da equipa de coordenação de CONTACTO, na mesma morada.

RECICLAGENS NO ENSINO PRIMÁRIO

Teoria de Conjuntos

Algumas das acções de reciclagem a que nos referimos no número anterior do CONTACTO, foram precedidas por uma sondagem. A elas foi dedicada a primeira meia-hora; o seu objectivo foi detectar as deficiências essenciais na formação dos professores, com vista a um melhor ajustamento da acção a desenvolver.

Análise das respostas às sondagens:

— **Questão 1**: "Que entende por CONJUNTO?"

Número de respostas obtidas: 183; não respondeu: 1.

Respostas totalmente deficientes: 75 (41%). Revelam confusão entre conjunto e sua representação; só aceitam conjuntos com elementos iguais.

Respostas com aspectos aceitáveis: 108 (59%). Dão uma sugestão de definição em compreensão, mas não se referem à definição em extensão; "definem" conjunto por termos tais como "agrupamento", "colecção", "grupo", etc..

— **Questão 2**: "Que entende por NÚMERO?"

Número de respostas obtidas: 181; não responderam: 3.

Respostas totalmente deficientes: 174 (96%). São dos tipos: "é a quantidade de elementos de um conjunto"; "é a representação gráfica de uma quantidade"; "é um conjunto de algarismos por uma certa ordem".

Respostas com aspectos positivos: 7 (4%). São do tipo: "número é uma propriedade dos conjuntos".

— **Questão 3**: "Considera que qualquer dos modos usuais de definir conjunto exige a definição de universo? Ilustre a resposta com um exemplo".

Número de respostas obtidas: 123. Não responderam: 61.

Respostas totalmente deficientes: 78 (63%). Limitam-se a responder "sim" ou "não"; confundem universo em teoria de conjuntos com universo em sentido astronómico ou com globo terrestre.

Respostas com aspectos aceitáveis: 45 (37%). Foram consideradas todas aquelas que revelam noção de sub-conjunto de um conjunto dado.

O Secretário do
Grupo de Trabalho de Aveiro

O prémio Householder para um português

O prêmio Householder de 1981 foi atribuído ao Dr. Marques de Sá. Dada a importância desse prêmio, CONTACTO decidiu informar-se. Para isso procurou o Dr. Graciano de Oliveira, que, tendo sido o orientador da tese do Dr. Marques de Sá, um dos seus arguentes nas provas de doutoramento e o proponente da tese ao prêmio, nos pareceu uma pessoa bem colocada para nos esclarecer. Publicamos uma entrevista com o Dr. Graciano de Oliveira.

CONTACTO. *Pode dizer-nos o que é o prêmio Householder?*

Graciano de Oliveira. Desde há cerca de vinte anos têm-se realizado, com uma periodicidade aproximada de três anos e pouco e em países diversos, encontros sobre Análise Numérica conhecidos pelo nome de "Gatlinburg Symposia". No de 1969 foi decidido instituir o prêmio Householder como homenagem ao Professor A.S. Householder, notável matemático americano, e como reconhecimento dos seus importantes contributos para o avanço da Análise Numérica.

Foi decidido que em cada encontro se atribuiria o prêmio Householder ao autor da melhor tese de doutoramento apresentada em qualquer país, desde o último encontro, sobre Álgebra Numérica ou sobre assuntos que pudessem arrastar consequências importantes para a Álgebra Numérica. Para a escolha da tese premiada foi designado um júri internacional.

CONTACTO. *Esse júri examina de facto todas as teses apresentadas em todo o mundo?*

G.O. - Na prática só examina aquelas que foram propostas ao prêmio, o que normalmente é feito pelo orientador da tese. Há assim uma primeira selecção que é feita pelos próprios orientadores. Em regra um orientador de tese não a propõe se vir que não tem nível suficiente.

CONTACTO. *Dizia-nos que o prêmio foi instituído em 1969. Significa isso que já houve vários laureados...*

G.O. - Exacto. O primeiro laureado foi F. Robert, em 1971, doutorado em Grenoble. A segunda atribuição do prêmio coube, em 1974, a O. Hald que obteve o doutoramento no Courant Institute de Nova Iorque. Em 1977 atribui-se o prêmio a D. Warner, doutorado na Universidade de S. Diego, California.

Finalmente, a quarta edição do prêmio Householder foi partilhada por um português, Marques de Sá, e por um belga, P. van Dooren.

CONTACTO. *Que importância atribui ao facto de o prêmio ter sido dado a um português?*

G.O. - Penso que foi um acontecimento muito importante para os meios matemáticos portugueses, pois significa que o Dr. Marques de Sá escreveu uma tese que o júri considerou a melhor, em igualdade com a de P. van Dooren, de entre todas as concorrentes, provenientes de vários países, desde Abril de 1977 até ao final de 1980. Tanto mais que a investigação matemática em Portugal está bastante atrasada, de tal modo que as Universidades portuguesas se vêem na necessidade de enviar massivamente os seus assistentes para o estrangeiro com a finalidade de prepararem o doutoramento. Ora a tese do Dr. Marques de Sá foi integralmente preparada em Portugal...

EDUARDO MARQUES DE SÁ

CONTACTO. *Mudando de assunto, poderia dar-nos uma ideia do que é a tese do Dr. Marques de Sá?*

G.O. - A tese do Dr. Marques de Sá intitula-se "Imersão de Matrizes e Entrelaçamento de Factores Invariantes".

Tem 169 páginas e todos os resultados que nela aparecem são originais. Só esta circunstância é já notável pois não é fácil escrever 169 páginas originais em Matemática. Além disso é costume as teses de doutoramento, em Portugal, terem uma boa parte expositória ou capítulos cuja originalidade se reduz a uma nova forma de expor matéria mais ou menos conhecida...

CONTACTO. *Mas seria possível pelo menos resumir-nos pelo menos parte do conteúdo matemático da tese?*

G.O. - Penso que sim. A tese tem vários resultados e limitar-me-ei ao mais importante. Evitarei pormenores técnicos e penso que poderei expor essa parte da tese de modo compreensível para quem tenha já feito algumas das cadeiras de Álgebra que actualmente fazem parte da licenciatura em Matemática.

Dada uma matriz $n \times n$ sobre um corpo arbitrário é possível associar-lhe, de modo unívoco, uma sucessão de polinómios de tal modo ordenados

(continua na pág. seguinte)

PRÉMIO HOUSEHOLDER *(continuado da pág. anterior)*

que cada um divide o seguinte. São os chamados polinómios invariantes e caracterizam perfeitamente as classes de matrizes semelhantes: duas matrizes são semelhantes se e só se têm os mesmos polinómios invariantes. Daqui resulta, em grande parte, a importância dos polinómios invariantes.

Um problema há muito em aberto era o seguinte:

Dada uma matriz A do tipo $(n+k)\times(n+k)$, sobre um corpo, qual é a relação *completa* entre os polinómios invariantes de A e os da sua submatriz principal, que designaremos por B, contida nas primeiras n linhas?

Este é o problema mais importante que o Dr. Marques de Sá resolve. A solução é espectacular e é um dos resultados mais espantosos de que tenho conhecimento, publicado em Álgebra Linear de há bastantes anos a esta parte.

Antes de explicar a solução, que consiste numa série de relações de divisibilidade, farei algumas observações sobre as dificuldades:

1. Era extremamente difícil imaginar que a solução havia de consistir em umas tantas relações de divisibilidade envolvendo os factores invariantes de A e B.

Como se sabe, quando num problema de Matemática se consegue, de qualquer modo, prever o que há-de ser a solução, as coisas ficam muito facilitadas.

2. A demonstração da suficiência (precisarei, adiante, o que isto significa) das relações é complicadíssima. Necessita duma desigualdade, como proposição auxiliar, cuja demonstração é extremamente complexa. Para a demonstração desta desigualdade o Dr. Marques de Sá recorre a uma aparelhagem analítica envolvendo questões de convexidade que mostram os seus largos conhecimentos fora da Álgebra e até como é um tanto fictícia a separação entre a Álgebra e a Análise. Há muitos outros exemplos na Álgebra Linear como aliás já referi com mais detalhe numa entrevista que dei, há 2 ou 3 anos, à conhecida revista **"O Mocho"**.

Exporei agora a solução dos problemas mas somente para o caso $k=1$ a fim de simplificar as coisas.

Sejam $f_1(\lambda),\ldots, f_{n+1}(\lambda)$ os polinómios invariantes de A ordenados por forma que $f_i(\lambda)$ divida $f_{i+1}(\lambda)$ (incluem-se os chamados polinómios invariantes triviais, isto é, os que são iguais a 1) e sejam $g_1(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$ os de B ordenados de forma idêntica.

O Dr. Marques de Sá demonstrou que se verificam as relações $f_i(\lambda)\mid g_i(\lambda)\mid f_{i+2}(\lambda)$, $i=1,\ldots,n$ (convencionando que $f_{n+2}(\lambda)=0$). De acordo com a notação dele usarei o símbolo $f(\lambda) :> g(\lambda)$ para indicar que $f(\lambda)$ divide $g(\lambda)$ em vez da tradicional barra vertical.

Então aquelas relações escrevem-se

$$(2.1)\qquad f_i(\lambda) :> g_i(\lambda) :> f_{i+2}(\lambda) \qquad i=1,\ldots,n$$

Chamaremos a (2.1) desigualdades de entrelaçamento para polinómios invariantes.

Inversamente, se for dada a matriz B com polinómios invariantes $g_i(\lambda)$ e se forem dados polinómios $f_i(\lambda)$ satisfazendo (2.1) (e grau de $\prod_{i=1}^{n+1} f_i(\lambda) = n+1$), existe uma matriz A do tipo $(n+1)\times(n+1)$ com os polinómios invariantes $f_i(\lambda)$ e contendo B como submatriz principal.

As relações (2.1) são, de modo surpreendente, formalmente idênticas às conhecidas desigualdades de entrelaçamento para valores singulares que passo a explicar. Antes porém referir-me-ei às desigualdades de entrelaçamento para valores próprios.

Seja H uma matriz (complexa) hermítica do tipo $(n+1)\times(n+1)$ e H_1 a submatriz principal contida nas primeiras n linhas. Designemos por $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$ os valores próprios de H e por $\mu_1,\ldots,\mu_n$ os de H_1. Como é sabido os valores próprios duma matriz hermítica são reais. Supô-los-emos ordenados por forma que $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_{n+1}$ e $\mu_1\geq\ldots\geq\mu_n$. Foi demonstrado por Cauchy que

$$(2.2)\qquad \lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1} \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

isto é, os λ_i e os μ_i entrelaçam-se.

Há vinte e poucos anos foi provado que estas dificuldades também são suficientes no seguinte sentido: se H_1 tem os valores próprios μ_i e se forem dados os números reais λ_i satisfazendo (2.2), existe uma matriz hermítica com os λ_i como valores próprios e contendo H_1 como submatriz principal.

Seja agora A uma matriz complexa qualquer do tipo $(n+1)\times(n+1)$. AA^* é, evidentemente, hermítica semidefinida positiva. As raízes quadradas não negativas dos valores próprios de AA^* chamam-se valores singulares de A. Há cerca de onze anos o matemático americano R.C. Thompson provou que se $\xi_1\geq\ldots\geq\xi_{n+1}$ são os valores singulares de A e se $\rho_1\geq\ldots\geq\rho_n$ são os valores singulares de uma sua submatriz (principal ou não) do tipo $n\times n$, então (convencionando que $\xi_{n+2}=0$)

$$(2.3)\qquad \xi_i \geq \rho_i \geq \xi_{i+2} \qquad i=1,\ldots,n$$

e que estas desigualdades são suficientes em sentido idêntico à suficiência das desigualdades de Cauchy.

Vê-se agora qual é a fantástica analogia entre (2.3) e (2.1) (e, em parte, (2.2)) e compreendem-se as razões que levaram o Dr. Marques de Sá a utilizar em (2.1) o sinal :> em vez de | para significar divide.

Esta analogia levanta um novo problema: como explicá-la? Será possível arranjar uma demonstração unificada das duas relações? Isso, possivelmente, levará à criação de uma nova estrutura que englobe, como casos particulares, as duas estruturas em que aparecem (2.1) e (2.3). O Dr. Marques de Sá e D. Carlson tentaram já algo nessa direcção. Eu próprio tenho pensado no assunto e tenho a impressão de que isso nos leva à Teoria dos Matroides o que, se fosse verdade, seria bastante interessante (devo dizer que o Dr. Marques de Sá não acredita muito nesta minha impressão). Resumindo, penso que, neste aspecto, o problema está longe de estar esgotado e é susceptível de levar a resultados de que, por enquanto, não suspeitamos. Este é outro aspecto importante da tese: além de resolver problemas, abre um novo campo de investigações.

Finalmente, direi que, para além das desigualdades de entrelaçamento para polinómios invariantes (2.1), a tese contém outros resultados importantes sobre outras questões relacionadas.

CONTACTO: *Não houve um problema de prioridade na descoberta das desigualdades de entrelaçamento para polinómios invariantes?*

G.O. - Houve de facto. Trata-se dum incidente interessante que posso relatar resumidamente. As de

(continua na pág. seguinte)

PRÉMIO HOUSEHOLDER *(continuado da pág. anterior)*

sigualdades (2.1) foram descobertas quase ao mesmo tempo por R. Thompson. Os trabalhos de Thompson e Marques de Sá foram feitos independentemente um do outro e foram publicados na mesma revista, a Linear Álgebra and its Applications. A prioridade no entanto é do Dr. Marques de Sá, pois, como é hábito, a revista indica a data em que os artigos chegaram à redacção, por onde se pode verificar que o dele chegou cerca de dois meses mais cedo do que o de R. Thompson. O do Dr. Marques de Sá chegou em Maio de 1977 apesar de ter feito a descoberta no verão de 1976. Demorou foi muito tempo a escrever o artigo e enviá-lo para publicação.

A coincidência não tira mérito a nenhum dos dois matemáticos. Aliás as ditas desigualdades começam a ser designadas por "The Sá-Thompson interlacing inequalities".

São coisas que acontecem.

CONTACTO. *Com frequência?*

G.O. - Mais ou menos. Quando se faz investigação actualizada pode acontecer.

De há uns anos para cá houve um grande incremento na investigação em Álgebra Linear de tal modo que hoje há três revistas somente dedicadas à Álgebra Linear. (O grupo de Álgebra Linear de que faço parte tem acompanhado e mesmo contribuído para esse incremento). Isso faz com que cada vez seja mais provável que 2 pessoas, sem saberem uma da outra, peguem no mesmo problema.

Posso até dizer-lhe que é a terceira vez que se dá uma coincidência de trabalho entre R. Thompson e pessoas do meu grupo. Nos dois casos anteriores ele teve sempre a prioridade. Por exemplo as desigualdades de entrelaçamento, já atrás referidas, para valores singulares foram também descobertas em Coimbra pouco depois de Thompson as ter encontrado.

CONTACTO. *Quem é o Professor Thompson? Pelos vistos o trabalho dele está próximo do do grupo de Coimbra.*

G.O. - Thompson trabalha na Universidade da Califórnia, em Santa Barbara. É um matemático consagrado que, desde há muitos anos, trabalha em Álgebra Linear para cujo desenvolvimento deu contributos importantíssimos. A sua obra é muito vasta e em vários aspectos tem estado próxima dos nossos trabalhos.

Há muitos anos que ele andava na pista de problemas do tipo das desigualdades de Sá-Thompson. Em 1968, mais ou menos, troquei com ele alguma correspondência na qual eu lhe falava precisamente do problema da relação completa entre os polinómios invariantes duma matriz e os duma submatriz principal embora nem eu nem ele, nessa altura, tivéssemos qualquer ideia de qual seria a solução. Diga-se ainda que em 1968 nenhum de nós sabia que o Dr. Marques de Sá já tinha nascido e suponho que, nesse ano, o Dr. Marques de Sá nunca tinha sequer ouvido falar em polinómios invariantes.

Queria ainda referir o papel que o Prof. Morris Newman terá desempenhado na solução encontrada por Thompson pois parece-me bastante interessante. Segundo o que Thompson escreve no seu artigo, em 1976 M. Newman ter-lhe-á dito que estava convencido de que a solução deveria envolver relações de divisibilidade entre os polinómios invariantes de A e B embora não soubesse quais fossem. Esta sugestão vaga terá sido o ponto de partida para o trabalho de Thompson.

CONTACTO. *Podemos então concluir que os trabalhos de Marques de Sá e Thompson coincidem?*

G.O. - Não, porque a tese de Marques de Sá além das desigualdades de que tenho falado contém muitos outros teoremas com os quais não houve qualquer coincidência. Se porém se refere somente aos artigos publicados por Marques de Sá e Thompson sobre as desigualdades, então verifica-se que, à parte pormenores, são praticamente coincidentes excepto numa coisa: a demonstração da tal proposição auxiliar (uma desigualdade) a que já me referi no início.

O Professor Thompson fá-la por ataque directo, usando um método que poderíamos chamar combinatório e tendo de considerar vários casos. É uma demonstração complicadíssima e muito longa (dezasseis páginas e meia). O Dr. Marques de Sá usa um método completamente diferente, provando até um resultado mais forte que é uma versão contínua da dita desigualdade. A passagem à versão contínua permite-lhe fazer uso da caracterização diferencial da convexidade e conseguir uma demonstração com menos de metade das páginas da de Thompson.

CONTACTO. *Para terminar que ilações acha que se podem tirar? Que perspectivas vê para o futuro?*

G.O. - Pessoalmente tenho-me batido desde há muitos anos por que as Universidades portuguesas tenham uma investigação autónoma o que, ainda hoje, só muito raramente acontece. A necessidade de se enviar para o estrangeiro praticamente a totalidade dos assistentes que querem preparar o doutoramento além de ser uma situação humilhante tem gravíssimos inconvenientes. Inclusivamente (é um círculo vicioso) contribui para que a investigação se não desenvolva em Portugal porque não há doutorandos (ou há muito poucos) a pressionarem os respectivos professores para que os orientem e forneçam problemas de investigação.

Isso facilita as cedências a solicitações de maior peso que levam a deixar a investigação em favor de outras actividades que, apesar da sua importância, prejudicam a investigação.

Estamos numa situação que penso que não terá paralelo em países da Europa. É antes uma característica de países do 3º Mundo. Espero que a prevista institucionalização da pós-graduação nas nossas Universidades seja um passo em frente.

Alterar este estado de coisas é, para mim, desde há muitos anos um problema prioritário. Só que a força da inércia é muito poderosa.

Compreende-se assim que eu tenha ficado imensamente satisfeito com a atribuição do prémio Householder a um português pois prova o que eu vinha dizendo: é possível fazer investigação de qualidade em Portugal. Além disso, num certo sentido, a tese do Dr. Marques de Sá é um produto inteiramente português porque foi completamente preparada em Portugal e porque desenvolve matéria que vinha a ser estudada no grupo de Álgebra Linear que neste momento funciona em Coimbra. Desenvolvimento esse que ele faz de forma brilhante. Por uma questão de justiça gostaria de dizer que a descoberta das desigualdades de entrelaçamento para polinómios invariantes foi feita inteiramente por ele sem que eu ou qualquer outra pessoa lhe tenha dado alguma sugestão ou achega.

Quero também salientar que das minhas palavras se não deve concluir que defendo o isolamen-

(continua na pág. seguinte)

FUNÇÕES PERIÓDICAS *(continuado da pág. 1)*

ridade e periodicidade) as propriedades da sucessão de números $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$, o resultado é o seguinte:

— Se x é racional (escrevendo-se então $x=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, fracção irredutível), os pontos $(E(nx))$ são os vértices de um polígono regular inscrito na circunferência unitária, exactamente o mesmo que encontramos quando determinamos as raízes q da unidade (fig. 2).

— Se x é irracional, os pontos da sucessão $(E(nx))$ distribuem-se uniformemente pela circunferência. Isto implica em particular que todo o ponto da circunferência pode ser aproximado por uma sucessão de pontos do conjunto $\{E(nx) : n\in\mathbb{N}\}$; ou, ainda, de uma forma intuitiva: se fixarmos um ponto qualquer da circunferência, seja β, e um arco arbitrariamente pequeno contendo β no seu interior, existe um número infinito de inteiros distintos n tais que $E(nx)$ é um ponto do interior do arco (fig. 3).

Estes resultados foram estudados num artigo que será submetido para publicação no boletim da S.P.M. (*"Uma propriedade das funções periódicas"* — Carlos D. Gamas e Manuel L. Esquível).

* Assistentes no Dpto de Matemática da F.C.T.U.C..

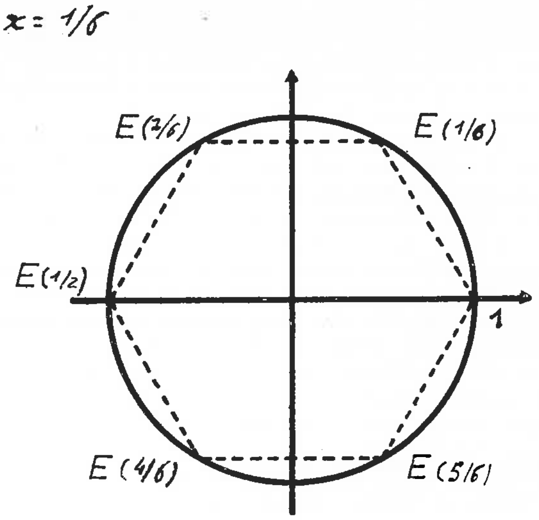

fig. 2

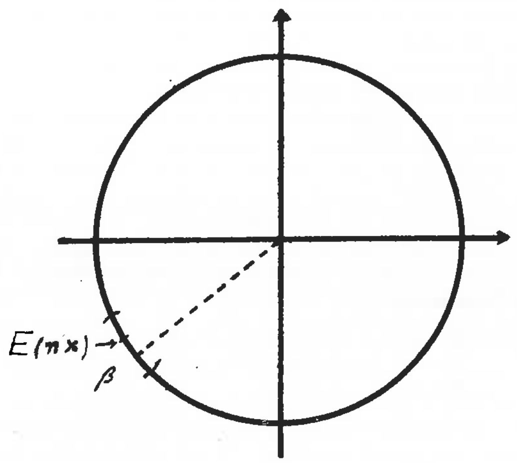

fig. 3

PRÉMIO HOUSEHOLDER *(continuado da pág. anterior)*

to. Aliás este grupo mantém relações muito estreitas com grupos trabalhando em Universidades estrangeiras. O intercâmbio, por todas as formas, é indispensável. Também não se deve deduzir das minhas palavras que defendo o corte nas bolsas para o estrangeiro. Isso, sem outras medidas, seria pura e simplesmente desastroso. O que penso é que a política de bolsas de estudo e de acções de pós graduação deve ser orientada para criar e desenvolver uma investigação mais ou menos autónoma em Portugal. Deveriam criar-se bolsas de estudo no estrangeiro pós-doutorais, etc. Bom, é um assunto que não posso nesta oportunidade desenvolver porque daria pano para mangas.

Já agora deixe-me dizer só mais uma coisa. Penso que a atribuição do prémio Householder a um português é um acontecimento importante que interessaria a todos os membros da nossa comunidade matemática. Como o CONTACTO só é distribuido na zona centro do país mais uma vez noto a falta de um veículo de comunicação a nível nacional como, por exemplo, um Boletim periódico da S.P.M..

"I N F L E X Ã O"

CONTACTO regozija-se com o aparecimento de INFLEXÃO, do **Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática** (Delegação Regional do Sul da S.P.M.).

Os objectivos das duas folhas são diferentes mas elas têm em comum a vocação de dar aos sócios da S.P.M. informação de actividades ligadas à matemática e lembrar a presença da Sociedade.

Desejamos que INFLEXÃO se desenvolva plenamente e se torne jornal lembrado pelos sócios.

P R O B L E M A S

1. *Provar que sendo 2^n-1 primo, então n é primo.*

2. *Sejam a, b, c e d números reais.*

Se $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$, mostre que $a=b=c=d$.

3. *Provar que $1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$ para todo x real.*

contacto

Nº 2 SETEMBRO 1981

Organizaram este número: José Machado Gil, João Filipe Queiró, Armando Gonçalves.

—

Delegação Regional do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática — Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. - 3000 - COIMBRA

—

Os artigos assinados responsabilizam apenas os seus autores.