Notas de Apoio
à disciplina de Análise Matemática II
do Mestrado Integrado em Engenharia Química

Gonçalo Gutierres

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2021

Este texto contém um resumo da matéria da disciplina de Análise Matemática do Mestrado Integrado em Engenharia Química da Universidade de Coimbra. Ele foi escrito tendo por base o material disponibilizado aos alunos durante os anos letivos 2019/2020 e 2020/2021, altura em que grande parte das aulas foram lecionadas remotamente ou de modo híbrido. Neste texto estão presentes apenas os temas principais, assim como algumas demonstrações que não foram feitas detalhadamente nas aulas, e a sua leitura não dispensa a frequência às aulas.

No final destas notas está um apêndice com alguns dos exemplos/exercícios de cálculo integral que foram utilizados nas aulas teóricas. O modo como as aulas decorreram nestes dois anos tornou difícil a resolução deste tipo de exercícios, e por isso pareceu-me pertinente disponibilizar estas resoluções aos alunos

Indíce

1 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1.1 Funções de Várias Variáveis

Exemplo

Quantos custa o combustível gasto, em média, num quilómetro por um automóvel, sabendo que gastou x litros de combustível para percorrer y quilómetros, e o preço do combustível é de z euros por litro? Não é difícil descobrir que o custo por quilómetro é dada pela função

$$C(x, y, z) = \frac{x\, z}{y} \text{ euro}/km\ .$$

Ou seja, o custo médio depende de três variáveis, x, y e z.

Definição 1.1. Uma função de duas variáveis é uma função $\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$,

onde o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (o conjunto dos pontos do plano) e o contradomínio está contido em $\mathbb{R}$.

De modo idêntico se podem definir funções de três ou mais variáveis.

Gráfico de uma Função de 2 Variáveis

O gráfico de uma função de uma função de duas variáveis é uma **superfície** em $\mathbb{R}^3$, ou seja no espaço.

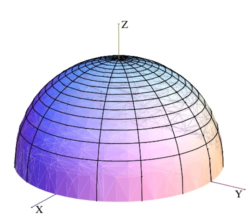
$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D_f\}$$

Exemplo: $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

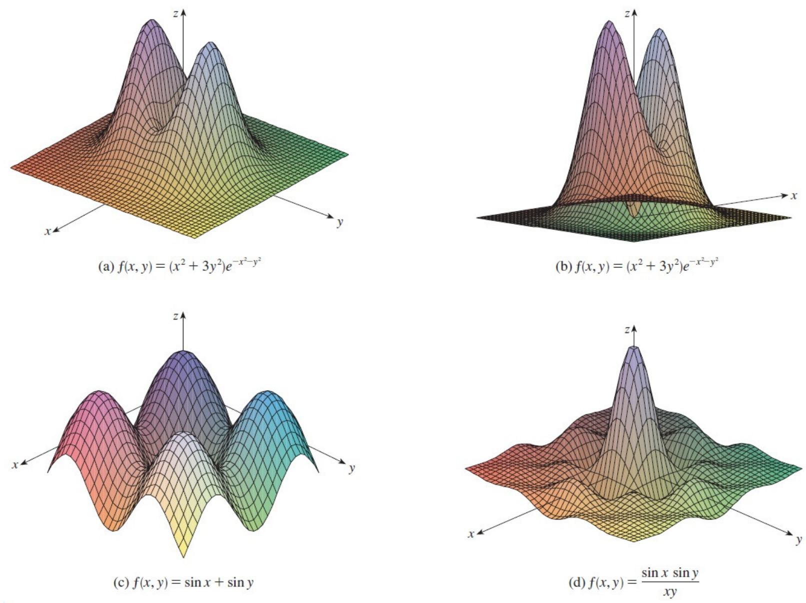
$D_f = \{(x, y) \,:\, 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 9\}$

Círculo de raio 3 e centro na origem.

$D'_f = \{f(x, y) \,:\, (x, y) \in D_f\} = \{\sqrt{9 - x^2 - y^2} \,:\, x^2 + y^2 \leq 9\} = [0, 3]$



O gráfico de f é a parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.



Gráficos de várias funções de 2 variáveis.

Limite de uma função de duas variáveis

Definição 1.2. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P_0 = (a, b)$ uma ponto de acumulação de D e $P = (x, y)$ um ponto do domínio.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \text{ se e só se}$$

$$(\forall_{\epsilon>0})\ (\exists_{\delta>0})\ \ 0 < ||(x, y) - (a, b)|| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon\,.$$

Nota. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) - L = 0$. Quando usamos a definição é, geralmente, mais fácil provar que um limite é zero.

Teorema 1.3 (do enquadramento)**.** *Sejam f, g e h três funções de duas variáveis tais que $D_h \subseteq D_f \cap D_g$, $P_0 = (a, b)$ um ponto de acumulação de D_h e numa bola aberta de centro em P_0,*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x, y) = L$.

Corolário 1.4. *O produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.*

Definição 1.5. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $P = (a, b) \in D$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)\,.$$

1.2 Derivadas Parciais

Exemplos:

1. $f(x,y) = 3x + xy$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 3 + y$ [y funciona como uma constante.]

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = x$ [x funciona como uma constante.]

2. $f(x,y) = \sin(x^2y) + e^x - y^2$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 2xy\cos(x^2y) + e^x$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = x^2\cos(x^2y) - 2y$$

Definição formal

Sejam f uma função de duas variáveis e $(a,b) \in D_f$.

Define-se a função, de uma variável, $g(x) = f(x,b)$.
[Fixa-se a segunda variável $y = b$].

Se $g'(a)$ existe, então a esse valor chama-se **derivada parcial de f em ordem a x no ponto** (a,b).

Definição 1.6.

1. *Derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a,b).*

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \quad (= g'(a))$$

2. *Derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a,b).*

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Interpretação Geométrica

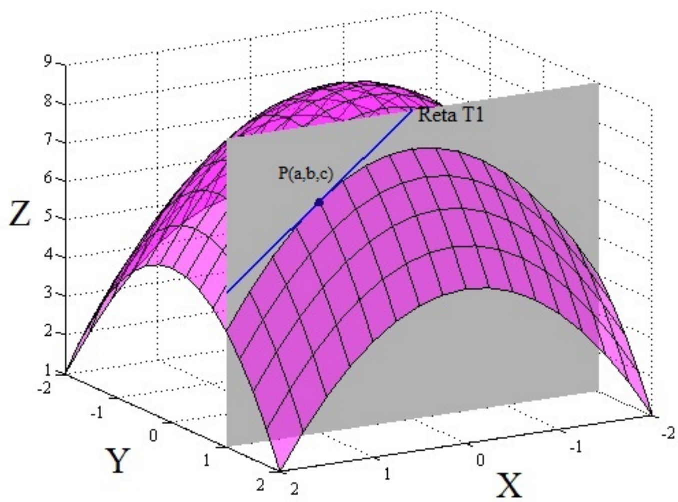
$z = f(x, y)$ é o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(a, b) = c$.

T_1 - reta tangente ao gráfico paralela ao plano XOZ.

declive de $T_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

T_2 - reta tangente ao gráfico paralela ao plano YOZ.

declive de $T_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$



Reta tangente ao gráfico na direção do eixo dos XX.

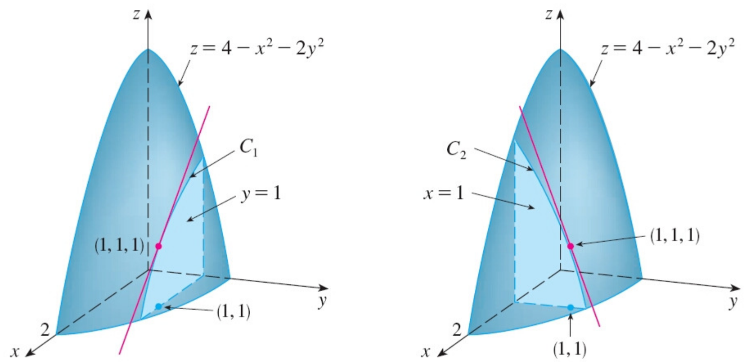
Exemplo

$z = 4 - x^2 - 2y^2$ é o gráfico da função $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$.

$f(1, 1) = 1$.

declive de $T_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$

declive de $T_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -4$



Definição 1.7. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então as (quatro) derivadas parciais de segunda ordem de f são:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$;
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$; [deriva-se primeiro em ordem a y e depois em ordem a x]
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$; [deriva-se primeiro em ordem a x e depois em ordem a y]
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = f_{yy}$.

Por iteração deste processo definem-se as derivadas parciais de ordens superiores.

O próximo teorema diz-nos que, em geral, não é preciso calcular f_{yx} se já conhecermos o valor de f_{xy}.

Teorema 1.8 (de Clairaut)**.** *Seja f uma função de duas (ou mais) variáveis tal que as funções f_{yx} e f_{xy} estão definidas numa bola aberta de centro (a, b) e são contínuas nesse ponto, então $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$.*

Por iteração deste processo definem-se as derivadas parciais de ordens superiores. O Terema de Clairaut continua a ser válido.

Aproximação Linear - funções de uma variável

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real.

A **Aproximação linear** de f em $a \in \mathbb{R}$ é

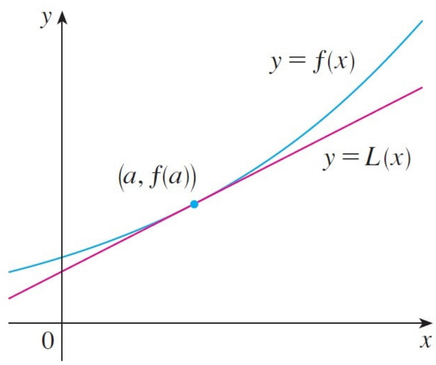
$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

Quando $|x-a|$ é uma valor muito pequeno, e f é diferenciável num intervalo que contém a e x, então $L(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$, ou seja

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)\,.$$

A aproximação linear serve para **estimar** o valor de uma função quando apenas sabemos como se comporta num ponto.

Cada função pode ter várias aproximações lineares, dependendo do ponto a escolhido.



O gráfico da aproximação linear $y = L(x)$ é a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

A aproximação linear consiste em substituir uma função pela função afim que tem por gráfico uma reta tangente ao gráfico da função.

Exemplo

Calcular o valor aproximado de $\sqrt{4.01}$?

Considera-se $f(x) = \sqrt{x}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Neste caso escolhe-se $a = 4$, $x = 4.01$ e $\Delta x = x - a = 0.01$.

$$f(4.01) \approx L(4.01) = f(4) + f'(4) \times 0.01 = 2 + \frac{1}{4} \times 0.01 = 2.0025$$

O valor real de $\sqrt{4.01}$ é $2.0024984\ldots$, que é portanto muito aproximado do valor aproximado calculado.

Aproximação Linear - funções de duas variáveis

Seja agora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis.

A **Aproximação linear** de f em $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)\,.$$

Quando os valores $|x-a|$ e $|y-b|$ são muito pequenos, e f é diferenciável numa vizinhança de (a, b) que contém (x, y), então $L(x, y)$ é uma boa aproximação de $f(x, y)$, ou seja

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)\,.$$

O gráfico da aproximação linear $z = L(x, y)$ é o plano tangente ao gráfico da função $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A equação do plano tangente ao gráfico da função $z = f(x, y)$ é

$$z = L(x, y) \Leftrightarrow z - f(a, b) = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)\,.$$

Diferencial

1. Para uma função de uma variável $y = f(x)$, o **diferencial** de y é

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\,dx\,.$$

2. Para uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, o diferencial de z ou **diferencial total** é

$$dz = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\,,$$

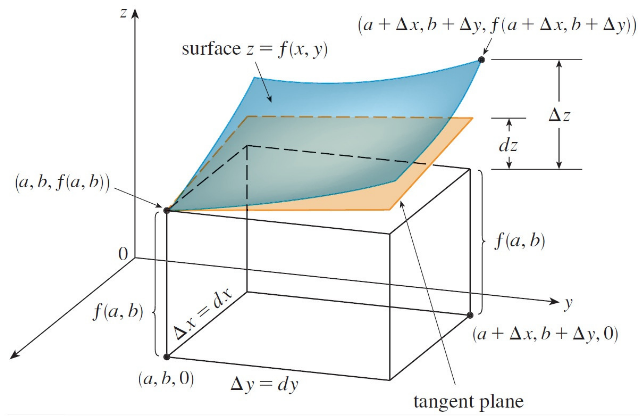
onde dx e dy representam variáveis independentes.

Portanto fazendo $dx = \Delta x = x - a$, $dy = \Delta y = y - b$ e $\Delta z = f(x, y) - f(a, b)$, temos que

$$\Delta z \approx dz\,, \text{ para valores pequenos de } dx \text{ e } dy.$$

Na notação dos diferenciais, a aproximação linear pode ser escrita

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz\,.$$



1.3 Função Diferenciável

Definição 1.9. Uma função f, de duas variáveis, é **diferenciável** em (a,b) ponto interior do seu domínio se tem derivadas parciais nesse ponto e existem funções $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ tais que :

$$\Delta z = f_x(a,b)\,\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \epsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y \text{ e}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x,\Delta y) = 0 = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x,\Delta y)$$

Teorema 1.10. *Se f é diferenciável em $P=(a,b)$, então f é contínua em P.*

Proposição 1.11. *Se as derivadas parciais f_x e f_y, existem numa bola aberta de centro em $P=(a,b)$ e, são contínuas em P, então f é diferenciável nesse ponto.*

Definição 1.12. O **vetor gradiente** de uma função de n variáveis $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é

$$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Exemplo: $f(x,y,z) = x^2y + 2yz$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2xy, x^2+2z, 2y\right)$$

Se considerarmos um ponto concreto do domínio, o vetor gradiente é um vetor concreto (neste caso no espaço). Por exemplo,

$$\nabla f(1,2,0) = (4,1,4)\ .$$

Definição 1.13. A **derivada direcional** de $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no ponto (a,b) na direção, e sentido, do vetor unitário $\hat{u} = (u_1, u_2)$, i.e. $||\hat{u}|| = 1$, é

$$D_{\hat{u}} f(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h\,u_1, b+h\,u_2) - f(a,b)}{h}\ .$$

Notas.

1. $D_{\hat{u}} f(a,b)$ mede a variação de f na direção, e sentido, de $\hat{u}$.

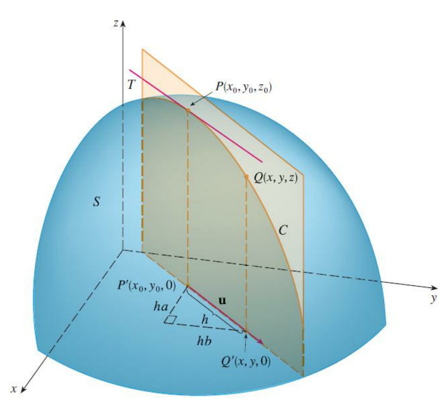
2. As derivadas parciais são casos particulares das derivadas direcionais. Considerando os versores $\hat{\imath} = (1,0)$ e $\hat{\jmath} = (0,1)$,
$$D_{\hat{\imath}} f(a,b) = f_x(a,b) \quad \text{e} \quad D_{\hat{\jmath}} f(a,b) = f_y(a,b)\,.$$

3. Se definirmos $g(h) = f(a+h\,u_1, b+h\,u_2)$, então $D_{\hat{u}} f(a,b) = g'(0)$.

4. Podem-se definir derivadas direcionais de funções com mais variáveis.

Teorema 1.14. *Se f é diferenciável em (a,b), então*

$$D_{\hat{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u} = f_x(a,b)u_1 + f_y(a,b)u_2\,.$$



Proposição 1.15. *Se f é diferenciável em $(a,b) \in D_f$, então:*

1. *A derivada direcional de f em (a,b) é máxima na direção e sentido do vetor gradiente, ou seja para $\hat{u} = \dfrac{\nabla f(a,b)}{||\nabla f(a,b)||}$.*

2. *A derivada direcional de f em (a,b) é mínima na direção vetor gradiente, mas no sentido oposto, ou seja para $\hat{u} = -\dfrac{\nabla f(a,b)}{||\nabla f(a,b)||}$.*

3. *A derivada direcional de f em (a,b) é nula na direção perpendicular ao vetor gradiente.*

Demonstração. $D_{\hat{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u} = ||\nabla f(a,b)||\,||\hat{u}||\,\cos\theta = ||\nabla f(a,b)||\,\cos\theta$

Como f e (a,b) são fixos, este valor depende apenas do cosseno do ângulo formado pelos dois vetores.

O valor é máximo quando $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$, ou seja quando os vetores $\nabla f(a,b)$ e $\hat{u}$ têm a mesma direção e sentido;

é mínimo quando $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$, ou seja quando os vetores $\nabla f(a,b)$ e $\hat{u}$ têm a mesma direção mas sentidos opostos;

e é nulo quando $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$, ou seja quando os vetores $\nabla f(a,b)$ e $\hat{u}$ são perpendiculares. □

1.4 Derivada da Função Composta

Funções Vetoriais

Definição 1.16. Uma função vetorial $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função que a cada ponto de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ associa um vetor de $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & (f_1(\mathbf{x}), f_2((\mathbf{x}), \cdots, f_m((\mathbf{x})) \end{array}$$

As funções $f_1, f_2, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ chamam-se funções componentes.

Uma função vetorial é contínua (diferenciável) se cada uma das suas funções componentes é continua (diferenciável).

Para conhecer o comportamento duma função vetorial, basta saber o que acontece com as suas funções componentes.

Matriz Jacobiana

Definição 1.17. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f_1, f_2, \cdots, f_m$ as respetivas funções componentes.

A matriz Jacobiana de f no ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma matriz $m \times n$.

$$J_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

- À matriz Jacobiana das funções reais, i.e. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chama-se vetor gradiente (já visto atrás).
- Cada linha da matriz Jacobiana é o vetor gradiente da respectiva função componente.

Teorema 1.18 (da função composta)**.** *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciável em $f(\mathbf{x})$, então*

$$J_{g\circ f}(\mathbf{x}) = J_g\left(f(\mathbf{x})\right) \cdot J_f(\mathbf{x})\,. \quad [\textit{produto de matrizes}]$$

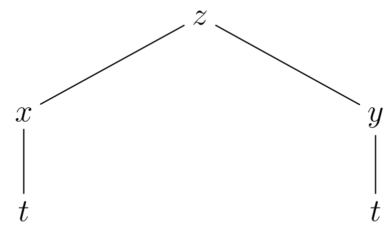
Corolário 1.19. *A composição de funções diferenciáveis é diferenciável.*

Derivada da função composta (regra da cadeia)

Teorema 1.20 (caso 1)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável, $x(t)$ e $y(t)$ funções deriváveis, então*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}\,.$$

Diagrama de árvore



Exemplo

$z = \sin(2x + y)$, $x(t) = t^2$, $y(t) = e^t$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \times \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \times \frac{dy}{dt}(t) = \\ &= 2\cos(2x + y) \times 2t + \cos(2x + y) \times e^t \end{aligned}$$

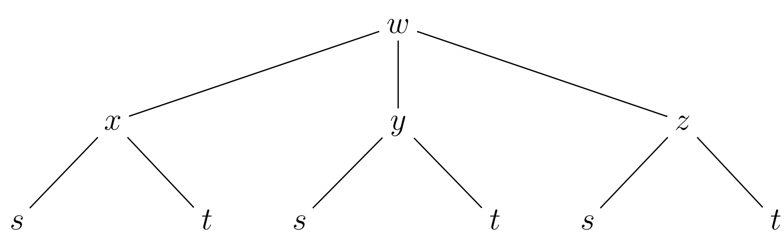
Quando $t = 1$, os valores de x e y são $x = 1^2 = 1$ e $y = e^1 = e$.

Portanto, $\dfrac{dz}{dt}(1) = 4\cos(e + 2) + e\cos(e + 2)$.

Teorema 1.21 (caso 2)**.** *Sejam $w = f(x, y, z)$, $x(s, t)$, $y(s, t)$ e $z(s, t)$ funções diferenciáveis, então*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial s}\,; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial t}\,. \end{aligned}$$

Diagrama de árvore



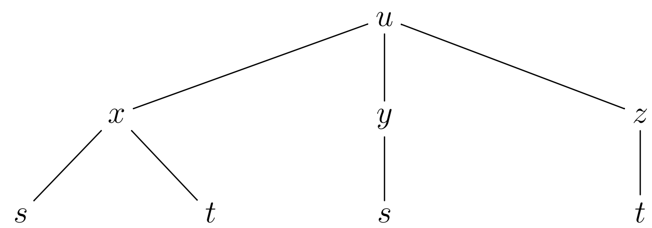
Exemplo

$u = 3x^2y - xz$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2s$, $z = t + 2$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{ds} = (6xy - z) \times 2s + 3x^2 \times 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \times \frac{dz}{dt} = (6xy - z) \times 2t - x \times 1$$

Quando $(s,t) = (1,2)$, temos que $(x,y,z) = (5,2,4)$ e portanto
$\frac{\partial u}{\partial s}(1,2) = 56 \times 2 + 75 \times 2 = 262$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial t}(1,2) = 56 \times 4 - 5 \times 1 = 219$



Exercício

Num determinado gás existe a relação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão(P), quando a temperatura(T) é $300k$ e está a aumentar à taxa de $0,1k/s$, e o volume(V) é de $100l$ e aumenta $0,2l/s$.

Resolução

Do enunciado sabemos que no instante em que
$V = 100$ e $T = 300$; $\dfrac{dV}{dt} = 0,2$ e $\dfrac{dT}{dt} = 0,1$.

Aplicando a regra da cadeia, obtemos que $\dfrac{dP}{dt} = -0.04155KPa$ (verificar as contas), e portanto a pressão está a diminuir.

Função Implícita

Teorema 1.22. *Sejam $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $P = (a,b,c) \in D$ tais que:*

1. *$F(a,b,c) = 0$;*
2. *As derivadas parciais F_x, F_y e F_z são contínuas numa bola aberta com centro em P;*
3. *$F_z a,b,c) \neq 0$;*

então a equação $F(x,y,z) = 0$ define $z(x,y)$ como função de x e y numa bola aberta B de centro P.

Para $(x,y,z(x,y)) \in B$, temos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \ .$$

Em particular, podemos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)$.

Este resultado é válido para $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $n \geq 2$.

Exemplo

A equação $4x^2 - y^2 + 2z^2 - 2 = 0$ define implicitamente z como função de x e y numa bola aberta de centro no ponto $P = (1, 2, 1)$.

Seja $F(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 2z^2 - 2$:

1. $F(1, 2, 1) = 0$;
2. $F_x = 8x$, $F_y = -2y$ e $F_z = 4z$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$;
3. $F_z(1, 2, 1) = 4 \neq 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{F_x(1,2,1)}{F_z(1,2,1)} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = -\frac{F_y(1,2,1)}{F_z(1,2,1)} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Demonstração. [Esboço] Se $F(x, y, z) = 0$ e $z = z(x, y)$ então, usando a derivada da função composta:

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,z)\right) = \frac{\partial(0)}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

□

Nota. Não é difícil deduzir a expressão da derivação implícita em cada caso a partir da derivada da função composta.

Plano tangente a uma superfície

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície de equação $F(x, y, z) = 0$ (por exemplo uma superfície quádrica), com F uma função diferenciável em $P = (a, b, c) \in S$, ou seja $F(a, b, c) = 0$.

Se $\nabla F(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, então o vetor gradiente $\nabla F(a, b, c)$ é normal à superfície S no ponto P.

Portanto uma equação do plano tangente a S no ponto P é

$$\boxed{\nabla F(P) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(P) \times (x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(P) \times (y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(P) \times (z - c) = 0\ ,}$$

e a equação vetorial da reta normal ao plano no ponto P é:

$$\boxed{(x, y, z) = (a, b, c) + t\,\nabla F(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}\ .}$$

1.5 Extremos de funções de várias variáveis

Definição 1.23. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in D$.

1. $f(P)$ é um máximo(mínimo) absoluto de f se
   $(\forall Q \in D)\ f(P) \geq f(Q)$ $(f(P) \leq f(Q))$.

2. A função f tem um máximo(mínimo) local em (a, b) se
   $(\exists \epsilon > 0)\ ||\vec{PQ}|| < \epsilon \Rightarrow f(P) \geq f(Q)$ $(f(P) \leq f(Q))$.

Ao ponto P chama-se ponto maximizante(minimizante).

Proposição 1.24. *Se f tem um extremo local em P, e as derivadas parciais existem, então então elas são nulas, ou seja $\nabla f(P) = \vec{0}$.*

Aos pontos P tais que $\nabla f(P) = \vec{0}$ chamam-se **pontos críticos** de f.

Mais geralmente se P é um ponto extremante local, então para todo o versor $\hat{u}$, $D_{\hat{u}} f(P) = 0$ ou $D_{\hat{u}} f(a, b)$ não está definida.

Extremos de funções de 2 variáveis

Teorema 1.25. *Sejam f uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e (a,b) um ponto crítico de f.*

Define-se $D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2$.

1. *Se $D > 0$ e $f_{xx} > 0$, então $f(a,b)$ é um mínimo local.*

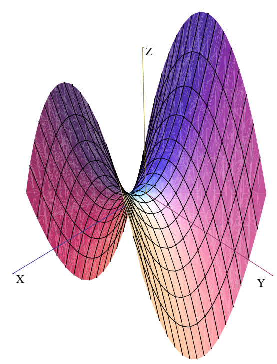
2. *Se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, então $f(a,b)$ é um máximo local.*

3. *Se $D < 0$, então $f(a,b)$ não é um extremo local*
   [(a,b) é um ponto sela].

4. *Se $D = 0$, então nada se pode concluir.*

Ponto Sela

A função $f(x,y) = x^2 - y^2$ não tem nenhum extremo local, mas tem um ponto sela $(0,0)$.



O gráfico desta função deu origem à utilização do nome *ponto sela* para um ponto crítico não extremante.

Exemplos 1.26.

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$

   Determinar os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Verificar se o ponto crítico é um extremante local.

$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 2 \times (-2) - 0^2 = -4 < 0.$

O ponto $(0,0)$ é um ponto sela.

2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Determinar os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ x^9 = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (-1,-1) \vee (x,y) = (1,1)$$

Verificar se os pontos críticos são extremantes locais.

$D(x,y) = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2)(12y^2) - (-4)^2 = 144x^2y^2 - 16 = 16(9x^2y^2 - 1).$

$D(0,0) = -16 < 0$ $\qquad$ $(0,0)$ é um ponto sela.

$D(1,1) = D(-1,-1) = 16 \times 8 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0.$

f tem dois mínimos locais $f(1,1) = -2$ e $f(-1,-1) = -2$.

Neste caso -2 é também o mínimo absoluto.

Conjuntos fechados e limitados [revisão]

Definições 1.27.

1. Um conjunto é **fechado** se contém a sua fronteira.

2. Um conjunto A é **limitado** se existe $L > 0$ tal que para quaisquer dois pontos P e Q no conjunto A, $||\vec{PQ}|| \leq L$.

Exemplos 1.28.

1. $A = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2<1\}$ é limitado, mas não é fechado.
2. $B = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2\leq 1\}$ é fechado e limitado.
3. $C = \{(x,y) \,:\, x=y\}$ é fechado, mas não é limitado

Exemplos idênticos também funcionam para subconjuntos do espaço.

Teorema de Weierstrass

Teorema 1.29. *Se uma função f é contínua num subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, fechado e limitado, então f atinge um máximo e um mínimo absolutos em D.*

Nota. Os extremos são atingidos nos pontos críticos de f ou na fronteira de D.

Exemplo

Seja $f : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^2$, com $f(x,y) = x^2+y^2$.

- O conjunto $[-1,1]\times[-1,1]$ é fechado e limitado.
- O mínimo de f é atingido no único ponto crítico de f: $f(0,0)=0$.
- O máximo de f é atingido na fronteira do domínio: $f(\pm 1,\pm 1)=2$.

  f tem quatro pontos maximizantes

Método dos multiplicadores de Lagrange [1 restrição]

Sejam f e g funções contínuas em $D\subseteq\mathbb{R}^3$ e $P=(a,b,c)$ um ponto interior de D.

Se P é um extremante local de f no conjunto $A=\{(x,y,z) \,:\, g(x,y,z)=k\}$, então existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que (a,b,c,λ) é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z)=k \end{cases}.$$

Como se provaria?

$\nabla g(P)\neq\vec{0} \Rightarrow z=z(x,y)$, ou equivalentemente para x ou y. [T. F. Implícita]

Calculam-se os pontos críticos de $h(x,y)=f\left(x,y,z(x,y)\right)$ usando a derivação implícita.

Exemplo

Qual é a distância do ponto $P = (2, 1, 0)$ ao plano de equação $x + y - z = 0$?

$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2$ [$\sqrt{f}$ mede a distância a P.]

$g(x, y, z) = x + y - z$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) = \lambda \\ 2(y-1) = \lambda \\ 2z = \lambda \cdot (-1) \\ z = x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -z \\ y - 1 = -z \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

A distância de P ao plano é $\sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

Método dos multiplicadores de Lagrange [2 restrições]

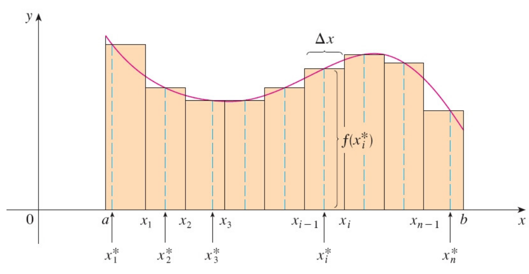
O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser usado, em geral, para determinar os extremos de uma função com m variáveis sujeita a $n < m$ restrições.

Por exemplo, para determinar os pontos críticos da função f, de 3 variáveis, sujeita às restrições $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$ resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = k \\ h(x,y,z) = c \end{cases}.$$

2 Cálculo Integral no plano e no espaço

Integral simples - definição



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)|x_i - x_{i-1}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

2.1 Integral duplo

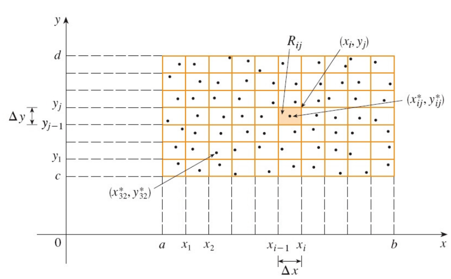
Partição regular com $x_0 = a$; $x_1 = a + \frac{b-a}{n}; \cdots ; x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}; \cdots ; x_n = b$.

Partição regular dum retângulo

$\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ - rectângulo fechado em $\mathbb{R}^2$.

Partição regular de $\mathcal{R}$ é induzida pelas partições de $[a,b]$ e $[c,d]$.

$$\begin{cases} x_0 = a;\ x_1 = a + \frac{b-a}{n}; \cdots ; x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}; \cdots ; x_m = b \\ y_0 = c;\ y_1 = c + \frac{b-a}{n}; \cdots ; y_i = c + i\,\frac{b-a}{n}; \cdots ; y_n = d \end{cases}$$



Área de $R_{ij} = \frac{(b-a)(d-c)}{m\times n}$.
Vamos considerar uma versão simplificada com $m = n$.

Somas de Riemann em duas dimensões

$S(f,m)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}*, y_{ij}*\right)\frac{(b-a)(d-c)}{m^2}$ é a soma de Riemann associada à partição regular de comprimento m.

Definição 2.1. A função $f:\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é integrável se existe $\lim\limits_{m} S(f,m)$ para qualquer escolha de $((x_{ij}*, y_{ij}*)$.

A esse limite chama-se integral duplo de f sobre $\mathcal{R}$ e escreve-se

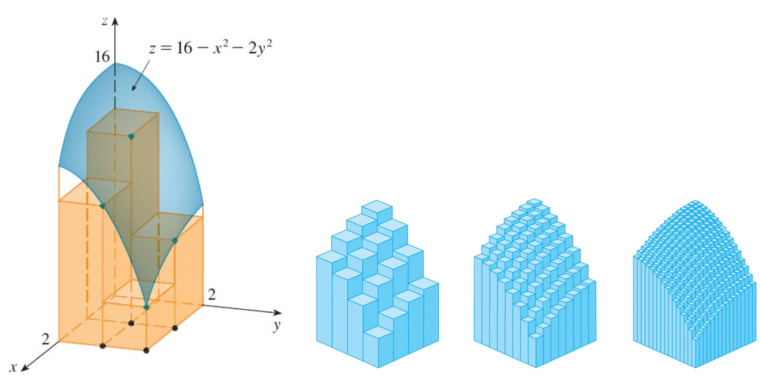
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA=\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Notas.

1. Se $f(x,y)\geq 0$, então $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$ é igual ao volume do sólido

   $E=\{(x,y,z)\,:\,a\leq x\leq b,\ c\leq x\leq d,\ 0\leq z\leq f(x,y)\}$.

2. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA=$valor médio$(f)\times$Área$(\mathcal{R})$



Somas de Riemann associadas à função $f(x,y)=16-x^2-2y^2$.

Teorema de Fubini

Teorema 2.2. *Seja* $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua.*
Então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy.$$

Demonstração intuitiva (Para $f \geq 0$):
$A(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$ é a área da secção do sólido E para x fixo.
O volume de E é igual a [valor médio de $A(x)$] $\times$ $(b-a)$, ou seja

$$\mathrm{Vol}(E) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx$$

Domínios não retangulares

Seja $D \subseteq [a,b] \times [c,d]$ uma região limitada do plano.

A função $f : D \to \mathbb{R}$ é integrável se e só se a função $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, com

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ se } (x,y) \in D \\ \\ 0 \text{ se } (x,y) \notin D \end{cases} \quad \text{é integrável.}$$

Notas.

1. Todas as funções contínuas num conjunto fechado e limitado são integráveis.
2. Todas as funções descontínuas apenas numa curva do domínio são integráveis.

   [É o que acontece usualmente nas funções definidas por ramos.]

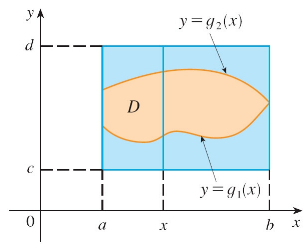
Generalização do Teorema de Fubini

Teorema 2.3. *Seja* $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, com*

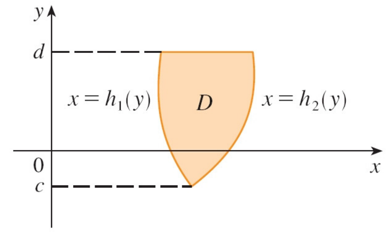
$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\},$$

sendo g_1 *e* g_2 *funções contínuas. Então*

$$\iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dydx.$$



Região Verticalmente Simples



Região Horizontalmente Simples

Propriedades do Integral Duplo

Sejam D uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^2$; f e g funções integráveis em D.

1. $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA.$

2. $\displaystyle\iint_D k\,f(x,y)\,dA = k\iint_D f(x,y)\,dA, \quad k\in\mathbb{R}.$

3. Se $f(x,y)\geq g(x,y)$ para $(x,y)\in D$, então
$$\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$$
.

4. Se $D = A\cup B$, com A e B conjuntos fechados, e $A\cap B\subseteq fr(A)$, então
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_A f(x,y)\,dA + \iint_B g(x,y)\,dA$$
.

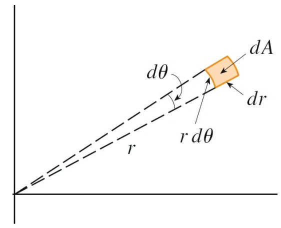
Integral Duplo em Coordenadas Polares

Proposição 2.4. *Sejam D uma região fechada e limitada do plano e $D^* = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta)\in D\}$, ou seja D^* é a região descrita em coordenadas polares.*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta,$$

Seja $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ a função de mudança de variável. Então $g(D^*) = D$ e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det J_g\,(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = r$$



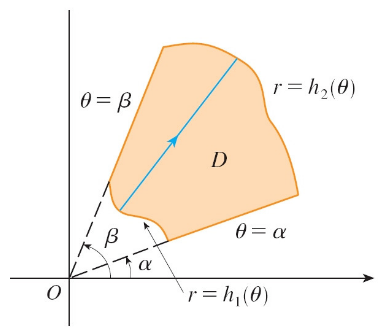
Teorema de Fubini em Coordenadas Polares

Teorema 2.5. *Seja $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com*

$$D_1 = \left\{(rcos\theta, rsin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\right\},$$

sendo g_1 e g_2 funções contínuas. Então

$$\iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\,drd\theta.$$



Região Simples em Coordenadas Polares

Exemplo

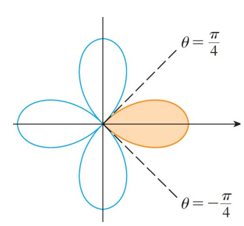
Como se calcula a área de uma das pétalas da figura em baixo?

Designando por D a pétala sombreada, ela é descrita em coordenadas polares por

$$D^* = \left\{(r,\theta)\ :\ r \leq \cos(2\theta),\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1\,dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos(2\theta)} r\,drd\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos^2(2\theta)\,d\theta = \cdots = \frac{\pi}{8}$$



Rosa de 4 pétalas.

Mudança de variável em Integral Duplo (caso geral)

Sejam D uma região do plano fechada e limitada, e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, contínua.

Definimos uma mudança de variável, de (x, y) para (u, v), através das equações

$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$, onde a função vetorial

$g : D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D$ é bijectiva, tem derivadas parciais de 2^a ordem contínuas e as suas funções componentes são as funções g_1 e g_2.

O conjunto $D^* = \{(u, v) \,:\, g(u, v) \in D\}$ é o conjunto D descrito nas novas coordenadas.

Chama-se *Jacobiano* da mudança de variável, ao determinante da matriz Jacobiana de g e representa-se:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det J_g(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Se o Jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, excepto possivelmente nos pontos de uma curva, então

$$\iint_D f(x, y)\ dxdy = \iint_{D^*} f\left(g(u, v)\right) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

Aplicações do Integral Duplo

1. **Áreas planas**

   Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano, então a área de D é

   $$A(D) = \iint_D 1\, dxdy = \iint_{D^*} r\, drd\theta.$$

2. O **Valor médio da função** f na região D é:

   $$\text{Média}\,(f) = \frac{\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy}{A(D)}$$

3. **Áreas de superfície**

   Vamos calcular a área de superfícies que sejam o gráfico de uma função de duas variáveis (ou a união finitas destes).

   Para $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$, tem-se

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy.$$

   D é a projeção de S no plano XOY.

   Nota. O valor $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$ é a norma do vetor normal à superfície no ponto $(x, y, f(x,y))$, ou seja

$$\vec{n}(x,y) = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Exemplo

Calcular a área de uma superfície esférica S de raio igual a 3.
Vamos considerar a função que define meia-esfera $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

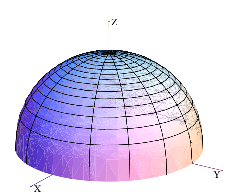
$$\text{Gráfico de } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \text{ e } (x,y) \in D_f\}$$

$$D_f = \{(x,y) : 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$A(S) = 2\iint_{D_f} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy =$$

$$2\iint_{D_f} \sqrt{\left(\frac{x^2}{9 - x^2 - y^2}\right) + \left(\frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}\right) + 1}\ dxdy =$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{\frac{r^2}{9 - r^2} + 1}\, r\, drd\theta = 36\pi$$



4. **Volume de sólidos**

   Sejam $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\right\}.$$

$$V(E) = \iint_D f_2(x, y) - f_1(x, y)\ dxdy.$$

   D é a projeção de E no plano XOY. De igual modo podemos considerar as projeções sobre os outros dois planos coordenados.

Exemplo
Calcular o volume da esfera cuja fronteira é
$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}$$

$$D = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 9\}$$

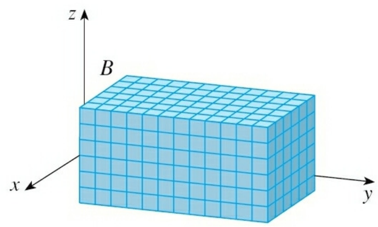
$$V(E) = \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \left(-\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) dxdy.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 2\sqrt{9 - r^2}\, r\, drd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} = \left[\frac{-\left(9 - r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} 9^{3/2} d\theta = 36\pi$$

2.2 Integral triplo

O Integral triplo defines-se num paralelipípedo $[a, b]\times[c, d]\times[s, t]$ de modo idêntico à definição de integral duplo num retângulo.



Teorema de Fubini

Teorema 2.6. *Se f é contínua em $Q = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, então*

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_s^t f(x, y, z)\, dzdydx = \int_c^d \int_s^t \int_a^b f(x, y, z)\, dxdzdy = \cdots$$

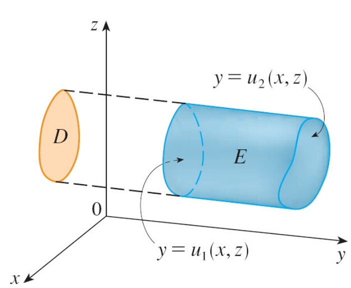
Generalização do Teorema de Fubini

Teorema 2.7. *Seja $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x, z) \in D \ e \ u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\right\},$$

sendo u_1 e u_2 contínuas em $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Então

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right) dxdz.$$

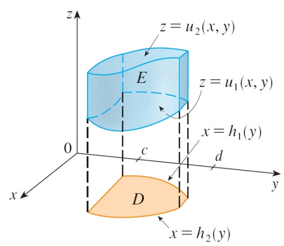


D é a projeção de E no plano XOZ. De igual modo podemos considerar as projeções nos planos XOY e YOZ.

Como se calcula um Integral Triplo?

$$E=\{(x,y,z):\ c\leq y\leq d,\ h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\ \text{e}\ u_1\,(x,y)\leq z\leq u_2\,(x,y)\}$$

$$\iiint_E f\,(x,y,z)\;dxdydz=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f\,(x,y,z)\;dzdxdy.$$



Com as devidas adaptações pode ser considerada qualquer outra ordem de integração.

Exemplo 2.8. Calcular o integral triplo $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$, com

$$E=\left\{(x,y,x)\in \mathbb{R}^3: x+y+z\leq 1\wedge x\geq 0\wedge y\geq 0\wedge z\geq 0\right\}.$$

De $x+y+z\leq 1$ e $z\geq 0$,
obtém-se $0\leq z\leq 1-x-y$; assim a região E pode ser descrita como:

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in R\ \wedge\ 0\leq z\leq 1-x-y\right\},$$

com $R=\text{proj}_{XOY}\,V$ definida por

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y\leq 1\ \wedge\ x\geq 0\ \wedge\ y\geq 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq 1\ \wedge\ 0\leq y\leq 1-x\right\}.$$

Então

$$\iiint_E \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dx\,dy\,dz=\iint_R\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dz\,dxdy=$$

$$\iint_R\left[\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dx\,dy=\iint_R\frac{1}{2}\,(x+y+1)^{-2}-\frac{1}{8}\,dx\,dy\ =$$

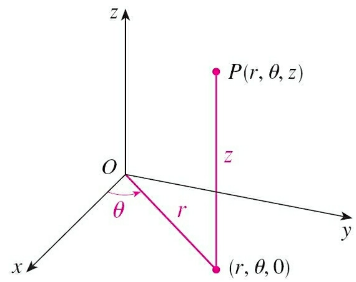
$$\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\,(x+y+1)^{-2}-\frac{1}{8}\,dy\,dx\ =\int_0^1\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+y+1}-\frac{1}{8}y\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

$$\int_0^1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\,(x-1)+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\frac{1}{8}\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\,\ln|\,x+1\,|\right]_0^1=$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\ln\,2-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\,\ln\,2-\frac{5}{16}.$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \quad \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \\ z = z \end{cases}$$



- (r, θ) são as coordenadas polares de (x, y).

- $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\; dxdydz = \iiint_{E^*} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) r\; drd\theta dz,$$

onde a região E^* é descrita em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 2.9. Considere as superfícies de equações $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $z = 2(x^2 + y^2)$, respectivamente. Calcule o volume da região situada entre as duas superfícies.

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ representa uma superfície esférica de centro na origem, e a equação $z = 2(x^2 + y^2)$ um parabolóide. Usando coordenadas cilíndricas, a intersecção das duas superfícies é dada pelas equações

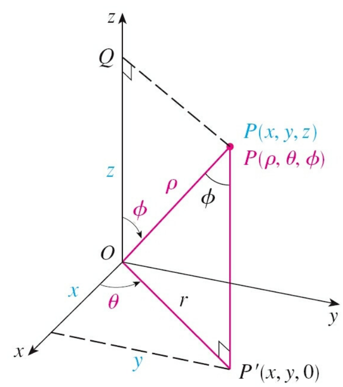
$$\begin{cases} r^2 + z^2 \,=\, 3 \\ z \,=\, 2\,r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \,=\, \frac{3}{2} \\ r^2 \,=\, \frac{3}{4} \end{cases} .$$

Temos então que a projecção no plano xOy da região entre as duas superfícies é a região definida em coordenadas cilíndricas por $r \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, e o seu volume é dado pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3 - r^2} - 2\,r^2) r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}\,(3 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{45}{32} \right) .$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 0 \\ \theta = \angle X^+OP' \text{ (ângulo orientado) }, \theta \in [0, 2\pi] \\ \phi = \angle Z^+OP \text{ (ângulo no espaço) }, \phi \in [0, \pi] \end{cases}$$



- (r, θ) são as coordenadas polares de (x, y).
- $r = \sqrt{x^2+y^2} = \rho \sin\phi$
- (ρ, ϕ) são as coordenadas polares de (r, z).
- P' é a projeção de P sobre o plano XOY.

$$(x, y, z) \quad \longrightarrow \quad (r, \theta, z) \quad \longrightarrow \quad (\rho, \theta, \phi)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| \times \left|\frac{\partial(r,\theta,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = r \times \rho = \rho \sin\phi \times \rho = \rho^2 \sin\phi$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dxdydz =$$
$$\iiint_{E_*} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi\ d\rho d\theta d\phi,$$

onde a região E^* é descrita em coordenadas esféricas.

Exemplo 2.10. Vamos usar um integral triplo para calcular o volume de uma esfera de raio a.

Seja E a região de $\mathbb{R}^3$ definida pela condição

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\,,\ a > 0\,.$$

O volume de E é dado pelo integral

$$V(E) = \iiint_E 1\, dV\,.$$

Fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas esféricas, obtém-se,

$$V(E) = \iiint_E 1\, dV = \iiint_{E'} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta\,,$$

com E' definido por

$$E' = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \wedge \ 0 \leq \phi \leq \pi \ \wedge \ 0 \leq \rho \leq a\} \ .$$

Então,

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \, \sin\,\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \, . \int_0^{\pi} \sin\,\phi \, d\phi \, . \int_0^{a} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= 2\,\pi \, . \, [-\cos\,\phi]_0^{\pi} \ . \ \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a = 2\,\pi \, . \, 2 \, . \, \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,a^3 \, .$$

Aplicações do Integral Triplo - Massa e Centro de Massa

Sendo E um sólido cuja densidade é dada pela função $d(x,y,z)$, contínua em E, então:

- a sua massa é dada por

  $m = \iiint_E d(x,y,z) \; dxdydz \,;$ [densidade média× volume]

- o seu centro de massa é o ponto de coordenadas (x_0, y_0, z_0), dadas por

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint_E x \; d(x,y,z) \; dxdydz \, ,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iiint_E y \; d(x,y,z) \; dxdydz \, ,$$

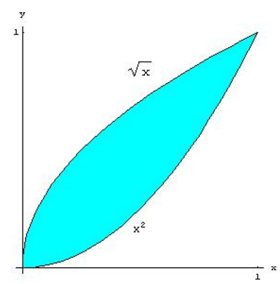
$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_E z \; d(x,y,z) \; dxdydz \, .$$

Anexo: Exercícios Resolvidos de Cálculo Integral

Integral duplo

1. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \ \wedge \ x \geq y^2\}$. Calcule $\displaystyle\iint_D 3\, dx\, dy$.

   Resolução

   A região D é, simultaneamente, verticalmente e horizontalmente simples. Podemos, por exemplo, usar a seguinte definição

   $$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\} ,$$

   para escrever o integral na forma iterada.

   Tem-se então

   $$\iint_D 3\; dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3\, dy\, dx = 3 \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx =$$

   $$= 3 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3 \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right] = 1 \,.$$

2. Considere o integral duplo $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ escrito na forma

   $$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-y}^{0} f(x, y)\, dx\, dy \, + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x, y)\, dx\, dy \;.$$

   (a) Faça um esboço de D .

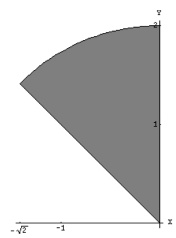
   (b) Inverta a ordem de integração.

Resolução

(a) A partir dos limites de integração, podemos definir o domínio de integração D com as seguintes condições

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{2} \\ -y \leq x \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2} \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0 \end{cases} .$$

e definir D graficamente



Esboço da região D

A recta $x = -y$ é a bissectriz dos quadrantes pares e a equação $x = -\sqrt{4-y^2}$ representa a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ onde $x \leq 0$.

(b) Para podermos inverter a ordem de integração temos que definir D como uma região verticalmente simples, isto é, com as condições

$$-\sqrt{2} \leq x \leq 0 \ \wedge \ -x \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \, .$$

A esta definição corresponde o integral iterado

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx \ .$$

3. Inverta a ordem de integração e calcule os seguintes integrais:

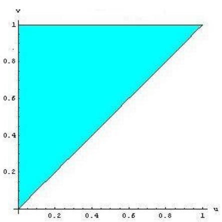
(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_u^1 \sqrt{1-v^2} \, dv \, du$;

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos\left(x^2\right) \, dx \, dy$.

Resolução:

(a) A partir dos limites de integração do integral dado $\displaystyle\int_0^1 \int_u^1 \sqrt{1-v^2} \, dv \, du$, podemos definir o domínio de integração R com as seguintes condições

$$0 \leq u \leq 1 \ \wedge \ u \leq v \leq 1 \, .$$



Esboço da região R

e definir R graficamente

Para podermos inverter a ordem de integração temos que definir R como uma região horizontalmente simples, isto é, com as condições

$$0 \leq v \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq u \leq v\,.$$

Podemos então escrever

$$\int_0^1 \int_u^1 \sqrt{1-v^2}\,dv\,du = \int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2}\,du\,dv = \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \int_0^v 1\,du\,dv =$$

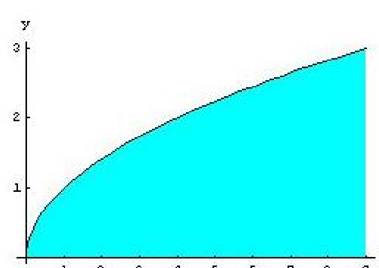
$$\int_0^1 \sqrt{1-v^2}\,[u]_0^v\;dv = \int_0^1 v\,\sqrt{1-v^2}\,dv = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2v\,\left(1-v^2\right)^{1/2}\,dv =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1-v^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\,(0-1) = \frac{1}{3}\,.$$

(b) O domínio de integração R é definido por

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3 \ \wedge \ y^2 \leq x \leq 9\right\}$$

e está representado na figura



Esboço da região R

Para inverter a ordem de integração temos que definir R como uma região verticalmente simples, isto é, com as condições

$$0 \leq x \leq 9 \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\,.$$

Podemos então escrever

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2 \, dx \, dy = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2 \, dy \, dx =$$

$$\int_0^9 \cos x^2 \int_0^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \int_0^9 \cos x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^9 \frac{x}{2} \cos x^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^9 2x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{4} \left[\sin x^2\right]_0^9 = \frac{1}{4} \sin 81\,.$$

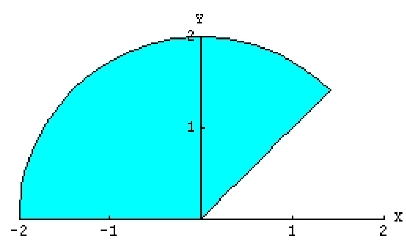
Mudança de variável

4. Use coordenadas polares para calcular $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2+y^2+1}\, dxdy$, com

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0 \text{ e } y \geq x\right\}\,.$$

Resolução

A região R é representada graficamente por



Esboço da região R

Fazendo a mudança para coordenadas polares das equações que definem R tem-se que $x^2+y^2 \leq 4 \Leftrightarrow r \leq 2$, $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$ e $y \geq x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$. A região

$$R^* = \{(r,\theta) : r \leq 2 \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi\}$$

é a região do plano polar que corresponde a R.

Logo

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2+1}\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^2 \sqrt{r^2+1}\, r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^2 (r^2+1)^{1/2}\, 2r \, dr \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{(r^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(5^{3/2}-1\right) \, d\theta = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}(5\sqrt{5}-1)\,.$$

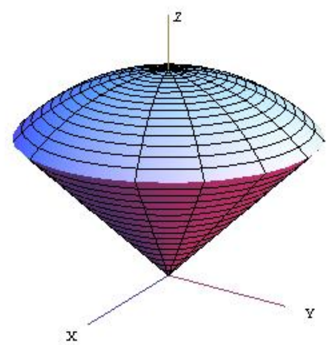
Integral Triplo

5. Calcule o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}.$$

Resolução

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa uma superfície esférica de raio 2 e a equação $z^2 = x^2 + y^2$ representa um cone. O sólido V está representado na figura.



Vamos resolver este problema usando coordenadas esféricas.

A inequação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ traduz-se em $\rho^2 \leq 4$, ou seja $0 \leq \rho \leq 2$. A inequação $z^2 \geq x^2 + y^2$ traduz-se em $\tan^2 \phi \leq 1$, ou seja, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$.

Observe-se que $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ representa a parte de cima do cone, enquanto que $\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ representa a parte de baixo.

Assim, em coordenadas esféricas, o sólido V é representado por

$V = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Assim, o volume de V é dado por

$$\iiint_V 1\, dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \left(\frac{16}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi.$$

18.(b) Calcule $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$, com

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

Resolução

Atendendo a que a região D é limitada por duas superfícies esféricas centradas na origem, o sistema de coordenadas mais conveniente para calcular o integral dado, é o sistema de coordenadas esféricas.

Tem-se, então

$$\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV = \iiint_{E'} \frac{1}{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\, \rho^2 \sin\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta\,,$$

com E' definido por

$$E' = \{(\rho,\theta,\phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \wedge \ 0 \leq \phi \leq \pi \ \wedge \ 2 \leq \rho \leq 3\}\ .$$

Podemos, então escrever

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^3 \frac{1}{\rho}\sin\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\,.\int_0^{\pi}\sin\,\phi\, d\phi\,.\int_2^3 \frac{1}{\rho}\, d\rho =$$

$$= 2\,\pi\,.\,[-\cos\,\phi]_0^{\pi}\ .\ [\ln\,\rho]_2^3 = 2\pi\,.\,2\,.\,\ln\,\frac{3}{2} = 4\,\pi\,\ln\,\frac{3}{2}\,.$$

Referências

[1] James Stewart: *Cálculo*, Volumes I e II. (Edição: Tradução da 8ª Edição Norte-americana, 2017)

[2] Ana d'Azevedo Breda, Joana Nunes da Costa: *Cálculo com funções de várias variáveis.* McGraw-Hill, Lisboa (1996).

[3] Gabriel E. Pires: *Cálculo diferencial e integral em* $\mathbb{R}^n$. IST Press (Colecção Ensino da Ciência e da Tecnologia), 2012.