1 Funções Vectoriais

1.1 Derivadas Parciais

1. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções seguintes:

   (a) $f(x,y) = e^{2xy^3}$;

   (b) $f(x,y,z) = \log(e^x + z^y)$;

   (c) $f(x,y,z) = e^x \sin y + \cos(z - 3y)$;

   (d) $f(x,y,z) = \cos(y\sqrt{x^2 + z^2})$.

2. Calcule as matrizes jacobianas das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = (x \sin y,\, y^2 e^x)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2,\, \sin(x\,z))\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $h(t) = \cos t\, \hat{\imath} + \sin t\, \hat{\jmath}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$;

   (d) $\varphi(u,v,w) = e^u(\cos v \sin w \hat{\imath} + \sin v \sin w \hat{\jmath} + \cos w \hat{\kappa})\,, \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

3. Calcule $\frac{du}{dt}$ sendo $u = \log\left(\sin \frac{x}{y}\right)$ e $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

4. Calcule $\frac{\partial u}{\partial s}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ sendo $u = x^2 e^{xy} + y^2 \sin(xy)$ e $\begin{cases} x = s^2 t \\ y = s\, e^t \end{cases}$.

5. Calcule $\frac{dz}{dy}$ sendo $z = f(x^2 + y^2, x + y)$ e $x = \phi(y)$.

1.2 Curvas e Superfícies no espaço

6. Faça um esboço da curva definida por:

   (a) $\vec{r}(t) = 4t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 3\sin t\hat{k},\ t \in [0\,,\,\pi]$;

   (b) $\vec{r}(t) = (3\exp(-2t) - 1, \exp(-t))\ ,\ t \in \mathbb{R}$;

   (c) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\sin t\hat{\imath} + \sqrt{2}\sin t\hat{\jmath} + 2\cos t\hat{k}\ ,\ t \in [0\,,\,2\pi]$.

7. Determine equações cartesianas de cada uma das curvas consideradas no exercício anterior.

8. Determine uma parametrização da curva C definida por:

   (a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2 \text{ e } y = x\}$;

   (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 1\}$;

   (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ e } y = 2x\}$.

9. Identifique e escreva uma equação cartesiana da superfície de equação paramétrica:

   (a) $\vec{r}(u,v) = (1 + 2u)\,\hat{\imath} + (-u + 3v)\,\hat{\jmath} + (2 + 4u + 5v)\,\hat{\kappa}$;

   (b) $\vec{r}(u,v) = u\,\cos v\,\hat{\imath} + u\,\sin v\,\hat{\jmath} + u^2\,\hat{\kappa}$;

   (c) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + u\,\cos v\,\hat{\jmath} + u\,\sin v\,\hat{\kappa}$;

   (d) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + \cos v\,\hat{\jmath} + \sin v\,\hat{\kappa}$.

10. Identifique e escreva uma equação cartesiana da superfície de equação paramétrica:

    (a) $\vec{r}(u,v) = (1+2u)\,\hat{\imath} + (-u+3v)\,\hat{\jmath} + (2+4u+5v)\,\hat{\kappa}$;

    (b) $\vec{r}(u,v) = u\,\cos v\,\hat{\imath} + u\,\sin v\,\hat{\jmath} + u^2\,\hat{\kappa}$;

    (c) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + u\,\cos v\,\hat{\jmath} + u\,\sin v\,\hat{\kappa}$;

    (d) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + \cos v\,\hat{\jmath} + \sin v\,\hat{\kappa}$.

11. Determine uma representação paramétrica para o plano que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e contém os vectores $\hat{\imath}+\ \hat{\jmath}+\ \hat{\kappa}$ e $\hat{\imath}-\ \hat{\jmath}+\ \hat{\kappa}$.

12. Determine uma representação paramétrica para a porção de superfície de equação $-x^2-y^2+z^2 = 1$, com $(x,y) \in [-1,1] \times [-3,3]$.

1.2.1 Recta tangente e plano normal a uma curva no espaço

Sejam C uma curva diferenciável no espaço representada parametricamente por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a\,,\,b]$ e $P_0 = r(t_0)$ um ponto da curva.

- Recta tangente $\quad (x,y,z) = P_0 + \lambda r'(t_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.
- Plano normal $\quad ((x,y,z) - P_0) \cdot r'(t_0) = 0$.

13. Determine uma equação da recta tangente à curva C no ponto P_0 indicado:

    (a) $x = \cos t\,,\quad y = 2\sin t\,,\quad z = t\,,\quad t \in [0, 2\pi]\,,\quad P_0 = (-1, 0, \pi)$;

    (b) $x = t^2\,,\quad y = 2\,,\quad z = -t^3\,,\quad t \in [0,2]\,,\quad P_0 = (1,2,-1)$.

14. Determine as equações da recta tangente e do plano normal à curva $2x^2+3y^2+z^2 = 47\,,\ \ x^2 + 2y^2 = z$, no ponto $P_0 = (-2,1,6)$.

1.2.2 Plano tangente e recta normal a uma superfície

Sejam S uma superfície diferenciável no espaço representada parametricamente por $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $P_0 = r(u_0,v_0)$ um ponto da superfície.

- Plano tangente $\quad (x,y,z) = P_0 + \alpha\,\dfrac{\partial r}{\partial u}(u_0,v_0) + \beta\,\dfrac{\partial r}{\partial v}(u_0,v_0), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Recta normal $\quad (x,y,z) = P_0 + \lambda\,(\dfrac{\partial r}{\partial u}(u_0,v_0) \times \dfrac{\partial r}{\partial v}(u_0,v_0)) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

15. Considere a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\sin u\,,\,1/(v^2))\,,\ \ 0 \le u < 2\pi,\ \ v > 0$.

    (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície no ponto $P_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$;

    (b) Represente geometricamente a superfície dada.

16. Considere a superfície S parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
    (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S no ponto $P_0 = (1,1,2)$;
    (b) Represente geometricamente a superfície dada.
17. Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S definida por
    $S\colon\ \vec{r}(u,v) = (u-v, u^2+v^2, uv)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
    no ponto P_0 tal que $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(1,1)$.
18. Determine uma equação do plano tangente às seguintes superfícies nos pontos indicados:
    (a) $z = x^2 + y^2$ no ponto $P_0 = (1, –2, 5)$;
    (b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$ no ponto $P_0 = (0, 1, –1)$;
    (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ no ponto $P_0 = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com $r > 0$;
    (d) $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $P_0 = (3, 4, 2)$.
19. Determine uma recta normal a P_0, para cada uma das superfícies do exercício anterior.
20. Mostre que as superfícies de equação $x^2/16 + y^2/9 = z^2$ e $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 90$, são tangentes nos pontos $(0,3,1)$ e $(0,-3,1)$.
21. Prove que toda a recta normal a uma esfera passa pelo seu centro.
22. Determine os planos tangentes à superfície de equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ paralelos ao plano de equação $x + y + z = 1$.
23. Seja f uma função diferenciável e S a superfície de equação $z = y\, f(x/y)$.
    (a) Mostre que S admite plano tangente em cada um dos seus pontos.
    (b) Mostre que todos os planos tangentes a S passam em $(0,0,0)$.

2 Cálculo Integral

2.1 Integral Duplo

2.1.1 Cálculo do integral duplo em coordenadas cartesianas

- **Teorema de Fubbini**

  Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $D = [a,b] \times [c,d]$.

  Então
  $$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy.$$

- Seja $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com
  $$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\},$$
  sendo φ_1 e φ_2 funções contínuas. Então
  $$\iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dydx.$$

24. Calcule $\iint_D f(x,y)\, dA$, sendo:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $D = [0,1]$ x $[0,1]$; R: $\frac{2}{3}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{se} \quad x+y \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x+y > 1 \end{cases}$ e $D = [0,1] \times [0,1]$; R: $\frac{1}{6}$

(c) $f(x,y) = x\,y - 1$ e D a região de $\mathbb{R}^2$ definida por $y \geq x^2$ e $x \geq y^2$; R: $-\frac{1}{4}$

(d) $f(x,y) = \sin x$ e D a região de $\mathbb{R}^2$ definida por $y \leq \sin x$, $\pi y \geq 2x$ e $x \geq 0$;
R: $\frac{\pi^2 - 8}{4\pi}$

(e) $f(x,y) = |x+y|$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \ , \ |y| \leq 1\}$; R: $\frac{8}{3}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2a-x}}$ e
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-a)^2 \geq a^2 \ , \ 0 \leq x \leq a \ , \ 0 \leq y \leq a\}$.
R: $\left(-\frac{8}{3} + 2\sqrt{2}\right) a^{\frac{3}{2}}$

25. Inverta a ordem de integração e calcule, nos casos em que é dada a função integranda, os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} \, dydx$; R: $\frac{e^4-1}{4}$

(b) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(x^3) \, dx \, dy$; R: $\frac{1-\cos 27}{3}$

(c) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} y \, dy \, dx$; R: $\frac{e-2}{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} \sin y \, \cos(\frac{x}{y}) \, dy \, dx$; R: $\sin 1\,(1 - \cos 1)$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}} f(x,y) \, dy \, dx$;

(f) $\displaystyle\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y) \, dy$;

(g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) \, dy \, dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y) \, dy \, dx$;

(h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{2y^2}^{y^2+1} f(x,y) \, dxdy$;

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) \, dydx$.

2.1.2 Mudança de variável no integral duplo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua.

Definimos uma mudança de variável, de (x, y) para (u, v), através das equações

$\begin{cases} x = \alpha\,(u, v) \\ y = \beta\,(u, v) \end{cases}$, onde α e β são funções de classe C^2 e $g = (\alpha, \beta) : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D$ é bijectiva.

Se $J_{(\alpha,\beta)}\,(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u,v)} \neq 0, \ \forall\,(u, v) \in D_1,$

então $\displaystyle\iint_D f(x, y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(\alpha\,(u, v)\,, \beta\,(u, v)) \left| J_{(\alpha,\beta)}\,(u, v) \right|\ dudv.$

Coordenadas polares

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\ drd\theta,$$

em que a região D_1 é a região D descrita em coordenadas polares.

26. Calcule os seguintes integrais, passando para coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy$ onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 4\}$;

R: $\frac{-19\left(\sqrt{2}-2\right)}{6}$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\ dy\ dx$; R: $\frac{32\pi}{5}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx$; R: $\frac{\pi}{2}$

(d) $\displaystyle\iint_D dxdy$ onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \leq \sqrt{3}x\}$.

R: $\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

27. Calcule os seguintes integrais, efectuando a mudança de variável indicada:

(a) $\displaystyle\iint_D dxdy,$ fazendo $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$, com
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$; R: $\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x + y)\ dxdy,$ fazendo $u = x + y$ e $v = 2x - y$, sendo
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$. R: $\frac{1}{3}$

28. Usando uma mudança de variável adequada, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy,$ onde D é o triângulo limitado pelas rectas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 2$;
R: $e - \frac{1}{e}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y)\ dxdy,$ onde D é o polígono de vértices nos pontos de coordenadas $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$. R: $\frac{\pi^4}{3}$

29. Usando a transformação
$$\begin{cases} x+y=u \\ y=uv \end{cases},$$
mostre que
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\, dy\, dx = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\,.$$

30. Usando mudanças de coordenadas convenientes, calcule $\iint_D xy\, dxdy$, onde
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 \leq 4 \,\wedge\, x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (4x^2+y^2 \leq 4 \,\wedge\, x \leq 0 \wedge y \geq 0)\}\,.$$
R: $\frac{3}{2}$

31. Calcule
$$\iint_E (x-y)\, e^{x+y} dxdy,$$
onde
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 3,\ x+y \geq 0,\ x-y \leq 0\right\}.$$
R: $\frac{e^{\sqrt{3}}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}$

2.1.3 Aplicações do integral duplo

- **Áreas planas** $A(D) = \iint_D dxdy.$
- **Áreas de superfícies**

  Para $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\right\}$,

  tem-se $A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy.$
- **Volumes de sólidos**

  Sejam $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e
  $$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\right\}.$$
  $$V(E) = \iint_D f_2(x,y) - f_1(x,y)\ dxdy.$$

32. Determine, usando integrais duplos, as áreas dos domínios planos definidos por:

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6x - x^2 \text{ e } y \geq x^2 - 2x\}$; R: $\frac{64}{3}$

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 16,\ (x+2)^2+y^2 \geq 4 \text{ e } y \geq 0\}$; R: 6π

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\ y \leq \sqrt{3}x \text{ e } y \geq x\}$; R: $\frac{3\sqrt{3}+\pi-6}{12}$

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x \text{ e } y \geq 0\}$; R: $\frac{\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4}$

(e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ y \leq x,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$;
R: $3\arctan\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{2}$

(f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x \text{ e } y \geq 2x - 4\}$; R: 9

33. Usando integrais duplos, calcule a área da região plana D definida por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}\,.$$

R: $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

34. Considere a região D definida por

$$D = \Big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq -4x \wedge x^2 + y^2 \leq 4y\Big\}\,.$$

(a) Represente-a graficamente.

(b) Diga quais dos seguintes integrais iterados representa a medida da área de D.

i. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-(x+2)^2}} dydx + \int_{-\sqrt{3}}^{-1}\int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-(x+2)^2}} dydx + \int_{-\sqrt{3}}^{-1}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx$

iii. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{\arccos\left(-\frac{r}{4}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{r}{4}\right)} r\ d\theta dr$

iv. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dxdy + \int_{1}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dxdy$

v. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{\arcsin\left(\frac{r}{4}\right)}^{\arccos\left(-\frac{r}{4}\right)} r\ d\theta dr$

vi. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}\int_{0}^{2} r\ drd\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\int_{0}^{4\sin\theta} r\ drd\theta$

vii. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\int_{0}^{-4\cos\theta} r\ drd\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\int_{0}^{2} r\ drd\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\int_{0}^{4\sin\theta} r\ drd\theta$

(c) Calcule a medida da área de D. R: 1.77189

35. Calcule as áreas das seguintes superfícies :

(a) Porção do plano de equação $6x+3y+2z=12$ situada no primeiro octante; R: 14

(b) Porção do parabolóide de equação $x^2+y^2=2z$ situada no interior da superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$; R: $\frac{2(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

(c) Superfície esférica; R: $4\pi r^2$

(d) Porção da superfície cónica de equação $x^2+y^2=z^2$ situada no interior da superfície cilíndrica de equação $x^2+y^2=1$; R: $2\sqrt{2}\pi$

(e) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4 \text{ e } x^2+y^2\leq z^2\}$; R: $8\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$.

36. Usando integrais duplos, calcule o volume dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos pelas seguintes condições:

(a) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ 0\leq z\leq x+y \end{cases}$ R: $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(b) $x^2+y^2\leq z\leq 2-x^2-y^2$ R: π

(c) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1 \\ 1\leq z\leq 12-3x-4y \end{cases}$ R: 22π

(d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 4 \\ x^2+y^2\leq 2x \end{cases}$ R: $\frac{16}{3}\pi-\frac{64}{9}$

(e) $\begin{cases} (z-16)^2\leq x^2+y^2 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases}$ R: $\frac{32}{3}\pi$

(f) $\begin{cases} z\leq 2-(x^2+y^2) \\ y+z\geq 2 \end{cases}$ R: $\frac{\pi}{32}$

37. Seja $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 1,\ x^2+z^2\leq y^2 \text{ e } 0\leq y\leq 2\}$.
Determine o volume de E usando integrais duplos. R: $\frac{4}{3}\pi$

38. Estabeleça, através de integrais iterados, o volume do sólido do 1^{o}octante limitado pelas superfícies

$$y=x,\ \ y=2x,\ \ z=1-y^2 \ \text{ e } \ z=0,$$

considerando que o sólido é projectado

(a) no plano xOy;
(b) no plano yOz;
(c) no plano xOz.

2.2 Superfícies Quádricas

39. Identifique e faça um esboço gráfico de cada uma das seguintes superfícies quádricas:

    (a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

    (b) $x^2 + z^2 = 9$

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 = -2z$

    (d) $x^2 + y^2 = 4 - z$

    (e) $(z-4)^2 = x^2 + y^2$

    (f) $y = x^2$

    (g) $\begin{cases} z = 2 - y^2 \\ x \geq 2 \end{cases}$

    (h) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

    (i) $x^2 - y^2 - z^2 = 9$

40. Represente geometricamente o sólido S definido pelas condições:

    (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$

    (b) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 \geq (z-6)^2$

    (c) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq x + y$

    (d) $0 \leq z \leq 2$ e $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$

41. Faça o esboço gráfico dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 6x + 3y + 2z \leq 12\right\}$

    (b) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 6y \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 36\right\}$

    (c) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 + z \geq x^2 + y^2 \text{ e } 2 - z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

2.3 Integral Triplo

2.3.1 Cálculo do integral triplo em coordenadas cartesianas

Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $f : E \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, sendo E definido por

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\right\}.$$

Então

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dxdydz = \iint_D \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dzdxdy.$$

42. Calcule os seguintes integrais triplos:

(a) $\iiint_E \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$, com
$$E = \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\right\}.$$
R: $-\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2$

(b) $\iiint_E z\ dxdydz$, em que E é a região do 1^{o}octante limitada pelas superfícies
$$x+y=2,\ x+2y=2 \ \text{ e } \ y^2+z^2=4.$$
R: $\frac{17}{12}$

(c) $\iiint_E y\ dxdydz$, em que E é limitado pelas superfícies de equações
$$y = x^2+z^2 \ \text{ e } \ y = \sqrt{20-x^2-z^2}.$$
R: $\frac{76}{3}\pi$

(d) $\iiint_E (x+y)^2\ dxdydz$, com
$$E = \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 6z\right\}.$$

43. Em cada um dos integrais seguintes, identifique o domínio de integração, escreva, se possível, os integrais dados por uma ordem de integração diferente, e calcule-os:

(a) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\ dz\ dy\ dx.$ R: $\frac{4}{3}\pi$

(b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2+x^2+y^2}^{3} dz\ dy\ dx.$ R: $\frac{\pi}{8}$

(c) $\int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\ dz\ dx.$ R: $\frac{304}{15}$

2.3.2 Mudança de variável no integral triplo

Coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{E_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\ drd\theta dz,$$

onde a região E_1 é descrita em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{E_2} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\, \rho^2\sin\varphi\ d\rho d\theta d\varphi,$$

onde a região E_2 é descrita em coordenadas esféricas.

44. Usando uma mudança de variável conveniente, calcule os seguintes integrais triplos

(a) $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dV$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\}\,; \qquad \text{R: } 4\pi$$

(b) $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dV$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}\,; \qquad \text{R: } 4\pi\ln\frac{3}{2}$$

(c) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}\,; \qquad \text{R: } \frac{3}{10}\pi$$

(d) $\displaystyle\iiint_E y\,dV$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge z \geq -\sqrt{x^2+y^2}\}\,; \qquad \text{R: } 0$$

(e) $\displaystyle\iiint_E z\,dV$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq z^2 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq -2z\}\,; \qquad \text{R: } -\frac{\pi}{6}$$

(f) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{1-(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9})}\,dxdydz$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2+36y^2+4z^2 \leq 36\}\,. \qquad \text{R: } \frac{3}{2}\pi^2$$

(g) $\displaystyle\iiint_E ((y+z)^2-x^2)\,dxdydz$, com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x+y+z \leq 1 \wedge -x+y+z \leq 4 \wedge -2 \leq 3x+z \leq 3\}\,.$$

45. Considere o conjunto

$$V = \Big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2-2z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\Big\}.$$

(a) Faça um esboço do conjunto V.

(b) Escreva uma expressão para

$$\iiint_V \sinh(xz)\,dxdydz$$

em termos de integrais iterados em coordenadas cilíndricas.

46. Considere o integral triplo I escrito na seguinte forma

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2-1}^{2-rcos\theta} 4r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta\,.$$

(a) Calcule o valor de I; R: 0

(b) Represente graficamente o domínio de integração E;

(c) Escreva I como um integral iterado usando coordenadas cartesianas.

2.3.3 Aplicações do integral triplo

- **Volumes** $V(E) = \iiint_E dxdydz$
- **Massa, Momento de Inércia e Centro de Massa**

  Sendo E um sólido cuja densidade é dada pela função $d(x, y, z)$, contínua em E, então

  - a sua massa é dada por
  $$m = \iiint_E d(x, y, z)\ dxdydz\,;$$
  - os momentos em relação aos planos coordenados YOZ, XOZ e XOY são dados, respectivamente, por
  $$M_{yz} = \iiint_E x\ d(x, y, z)\ dxdydz\,;$$
  $$M_{xz} = \iiint_E y\ d(x, y, z)\ dxdydz\,;$$
  $$M_{xy} = \iiint_E z\ d(x, y, z)\ dxdydz\,;$$
  - o seu centro de massa é o ponto de coordenadas (x_0, y_0, z_0), dadas por
  $$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m} \quad \text{e} \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}\,.$$

47. Usando integrais triplos, calcule o volume das regiões de $\mathbb{R}^3$ definidas por:

    (a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq (z-1)^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$; R: $\frac{\pi}{3}$

    (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$; R: $\frac{\pi}{6}$

    (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 8 \\ z^2 \geq x^2 + y^2 \end{cases}$; R: $\frac{64(\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

    (d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \end{cases}$. R: $\frac{10}{3}\pi$

    (e) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$. R: $\frac{3\pi}{2}$

48. Determine o volume dos seguintes sólidos

    (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 \text{ e } x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$; R: $\frac{14}{3}\pi$

    (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \text{ e } y \geq x\}$. R: $\left(\sqrt{3} - \frac{9}{8}\right)\pi$

    (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 \leq 4\,,\ y + z \leq 4,\ y \geq 0 \ \text{ e } \ z \geq 0\}$. R: $\frac{128}{5}$

49. Calcule o volume de $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$. R: $\frac{2}{3}\pi$

50. Determine a massa do sólido

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

sabendo que a densidade, em cada ponto, é directamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem.

R: $m = \frac{124}{5} k\pi$

51. Supondo que o sólido V, limitado pelas superfícies de equações

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad z = x^2 + y^2,$$

é homogéneo, determine a massa e o momento em relação ao plano XOY.

R: $m = \frac{k\pi}{6}$; $M_{xy} = \frac{k\pi}{12}$

52. Determine as coordenadas do centro de massa de

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 1\},$$

sabendo que $\rho(x, y, z) = k|z|$. R: $\left(0, 0, \frac{9}{4}\right)$

53. Considere o sólido S definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ \ y \geq \sqrt{3}x, \ \ z^2 \geq 4(x^2 + y^2) \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Determine a massa total de S, sabendo que a densidade em cada ponto (x, y, z) de S, é dada por $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. R: $m = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{1}{2}$

54. Seja E o sólido definido por

$$\begin{cases} z^2 \geq 4(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 + (z - 6)^2 \geq 17 \\ 0 \leq z \leq 5. \end{cases}$$

Calcule a massa total de E, sabendo que a densidade, em cada ponto (x, y, z) de E, é proporcional à distância desse ponto ao plano de equação $z = 6$. R: $m = k\frac{11}{4}\pi$

55. Considere o sólido V descrito por

$$V = \Big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z^2 \leq x^2 + y^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\Big\}.$$

Apresente uma expressão para o seu volume em termos de

(a) um integral múltiplo em coordenadas cilíndricas;

(b) um integral múltiplo em coordenadas esféricas.

2.4 Integral Curvilíneo de uma função escalar

2.4.1 Cálculo do integral curvilíneo de uma função escalar

Seja C uma curva no espaço, de classe C^1 e regular, representada parametricamente por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ (com r de classe C^1 e $r'(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$). Seja ainda $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.

$$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(r(t))\, \|r'(t)\|\, dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

56. Calcule o $\int_C f(x,y,z)\, ds$, onde

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e C é a curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \quad ,t \in [0, 2\pi]; \\ z = t \end{cases}$$
R: $2\sqrt{2}\pi^2$

(b) $f(x,y,z) = x \cos z$ e C é a curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \quad ,t \in [0, 1]; \\ z = 0 \end{cases}$$
R: $\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

(c) $f(x,y,z) = \frac{z}{1+2x-y}$ e C é a curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t^2 \\ y = 2t^2 \quad ,t \in [0, 1]. \\ z = 5t \end{cases}$$
R: $25\left(\sqrt{2} - 1\right)$

57. Calcule:

(a) $\int_C \frac{1}{x-y}\, ds$, em que C é o segmento de recta de equação $y = \frac{1}{2}x - 2$, compreendido entre os pontos $A(0,-2)$ e $B(4,0)$; R: $\sqrt{5}\ln 2$

(b) $\int_C xy\, ds$, onde C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$; R: 12π

(c) $\int_C x - \sqrt{y}\, ds$, onde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \vee y = 4) \wedge |x| \leq 2\}$; R: $\frac{49}{6} - \frac{17}{6}\sqrt{17}$

(d) $\int_C x^2 - y^2\, ds$, onde $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge x + y + z = 0\}$. R: 0

2.4.2 Aplicações do integral curvilíneo de uma função escalar

- **Comprimento de uma curva**

$$l(C) = \int_C ds.$$

- **Área de uma superfície**

Seja C uma curva plana, simples, de classe C^1 e regular, representada parametricamente por $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in C$.

Então se S é a superfície definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\}$, a área de S é dada por

$$A(S) = \int_C f(x,y)\, ds.$$

58. Sejam C_1 e C_2 as curvas de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 2\cos 4t \\ y = 3\sin 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

respectivamente.

(a) Faça um esboço de C_1 e C_2;

(b) Mostre que o comprimento de C_2 é igual a 4 vezes o comprimento de C_1.

59. Considere uma lata cilíndrica cuja base é modelada parametricamente por $(\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, e à qual foi feito um corte, no topo, modelado pela função $z = 2 + \frac{1}{2}\sin(3t)$. Calcule a área da superfície lateral da lata. R: 4π

60. Calcule a área da superfície S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C \wedge 0 \leq z \leq \frac{|\,y\,|}{\sqrt{3 - 2\,x}}\right\},$$

onde C é o arco da curva de equação $2\,(1-x) = y^2$ que une os pontos $A = (0, -\sqrt{2})$ e $B = (0, \sqrt{2})$. R: 2

61. Pretendem-se caiar ambos os lados de uma cerca que tem por base a curva

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{30}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{30}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ e } y \geq 0\right\}$$

e em que a altura é dada em cada ponto $(x,y) \in C$ por $a(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$. Desprezando os encargos com a cal, e sabendo que o pintor leva 10 euros por caiar 25 u.a., determine o preço a que fica o trabalho. R: 360 euros

62. Determine o comprimento de uma catenária uniforme (a densidade é constante), de equação $y = 2\cosh\frac{x}{2}$, entre os pontos de abcissas -5 e 5.

R: $4\sinh\frac{5}{2}$

2.5 Integral Curvilíneo de uma função vectorial

2.5.1 Cálculo do integral curvilíneo de uma função vectorial

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^1 e regular, representada parametricamente por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a\,,\,b]$, com $r'(t) \neq 0$ para $t \in [a\,,\,b]$.

Seja ainda $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ contínua tal que $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

Suponhamos que $C \subset E$. Então

$$\int_C F(x,y,z) \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))\, x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\, y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\, z'(t)\right] dt.$$

63. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde

(a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy)\hat{\imath} + (y^2 - 2xy)\hat{\jmath}$ e C é o arco da parábola de equação $y = x^2$ que vai de $A(-2,4)$ a $B(1,1)$; R: $-\frac{369}{10}$

(b) $F(x,y) = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ e C é o arco da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido directo, que vai de $A(0,2)$ a $B(2,0)$; R: $3\pi - \frac{8}{3}$

(c) $F(x,y,z) = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ e C é o arco da curva de equação

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^4 \end{cases}$$

que une os pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$ e orientada de A para B; R: 3

(d) $F(x,y,z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e C é a curva definida por

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

orientada no sentido directo. R: π

(e) $F(x,y) = \big(y+1, -x^2\big)$ e C é a curva definida por

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \vee y = 4) \wedge x \in [-2,2]\},$$

orientada no sentido directo; R: $-\frac{32}{3}$

(f) $F(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ e C é a elipse definida por

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x + z = 1.$$

R: -4π

64. Sendo $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 1\}$ e C a curva fechada definida pela intersecção de Q com o plano $z = 1$ e orientada no sentido directo, calcule

$$\int_C y\, dx + x\, dy + z\, dz\,.$$

R: 0

65. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y,z) = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - z\hat{k}$, no deslocamento ao longo da curva C definida por:

$$\begin{cases} z = y^4 \\ x = 1 \end{cases}, \qquad \text{desde } (1,0,0) \text{ a } (1,1,1)\,.$$

R: $\frac{1}{2}$

66. Considere as duas superfícies de equações

$$S_1 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad S_2 : z = \sqrt{3}\,,$$

e seja Γ a linha de intersecção de S_1 com S_2. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$\vec{G}(x,y,z) = -y^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + (z^2+1)\hat{k},$$

para deslocar uma partícula material ao longo da curva Γ, orientada no sentido directo. R: 0

2.5.2 Campos conservativos. Independência do caminho

67. Calcule
$$\int_C e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy,$$
onde C é uma curva entre o ponto $P(0,0)$ e o ponto $Q\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. R: $e^{\frac{\pi}{2}}$

68. Calcule $\int_C (y - x^2) \, dx + x \, dy$, onde
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2x - x^2 \wedge 0 \le x \le 1) \vee (x + 3y = 4 \wedge 1 \le x \le 4)\}$$
e está orientada de $A = (4,0)$ para $B = (0,0)$. R: $\frac{64}{3}$

69. Determine a função $\phi(x)$, com primeira derivada contínua, que se anula para $x = 2$ e tal que o integral $\int_C 2y \, dx + \phi(x) \, dy$ é independente do caminho de integração. R: $\phi(x) = 2x - 4$

70. Calcule o integral $\int_C \frac{y \, dx - x \, dy}{y^2}$ onde C é uma curva simples, fechada e parcialmente suave, que não intersecta o eixo das abcissas. R: 0

71. Calcule:
    (a) $\int_\gamma 2xyz \, dx + (x^2 z + z^2) \, dy + (x^2 y + 2yz) \, dz$,
    onde γ é uma curva suave que liga os pontos $A = (1,5,0)$ e $B = (1,0,-1)$. R: 0
    (b) $\int_\gamma y^2 \cos x \, dx + (2y \sin x + e^{2z}) \, dy + 2y e^{2z} \, dz$,
    onde γ é uma curva suave que liga os pontos O e $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right)$. R: $1+e^2$

2.5.3 Teorema de Green

Seja R uma região do plano, aberta e simplesmente conexa, limitada por uma curva C, simples, fechada, seccionalmente de classe C^1 e regular, orientada no sentido directo ou positivo.

Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, um campo de vectores de classe C^1 em D, onde D é uma região que contém R. Então
$$\oint_C F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.$$

72. Por aplicação do Teorema de Green, calcule o integral $\int_C -x^2 y \, dx + xy^2 \, dy$, onde C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$, orientada no sentido directo.
R: $\frac{\pi}{2} a^4$

73. Sendo
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge y^2 \text{ e } x \le \frac{y^2}{2} + 2 \right\},$$
use o Teorema de Green para calcular o integral $\iint_R y^2 \, dxdy$.
R: $\frac{64}{15}$

74. Seja $K = \int_C y\, dx + e^y y^2\, dy$ onde C é a fronteira, orientada no sentido directo, da região plana R determinada pelas condições

$$x \leq 2 \ \text{ e } \ y^2 \leq 2(x+2).$$

Apresente o valor da área de R em função de K.

75. Considere o campo de vectores definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\text{arccos } x}, x+1\right), \quad (x,y) \in \left]-1,1\right[\times \mathbb{R}.$$

Calcule o trabalho realizado pelo campo F para deslocar uma partícula desde o ponto $A = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ até ao ponto $B = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, ao longo do arco de circunferência definido por

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x \geq 0. \qquad \text{R: } \frac{1}{8}\pi + 1$$

76. Calcule $\int_\Gamma e^{x^2} dx + \left(1+y^2\right) dy$, onde Γ é a curva que se obtém por justaposição da curva definida por $x^2 + y^2 = 4$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, orientada de $A\,(0,2)$ para $B\,(2,0)$, com a curva definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t^2 - 8t \end{cases}, \ t \in [0,1]. \qquad \text{R: } -30$$

77. Considere a região plana

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \text{ e } x^2 + y^2 \leq -2x\right\}.$$

(a) Calcule o valor da constante k dada por $k = \iint_R y\, dA$. R: $\frac{1}{6}$

(b) Sendo C a curva com orientação positiva, que é fronteira da região R, mostre que

$$\int_C (x + 2y^2)\, dx + (xy + y^2)\, dy = -3k.$$

78. Recorrendo ao Teorema de Green, determine condições que definam um sólido cujo volume é dado por

$$\int_C (y^3 + 2yx^2)\, dx + (2x + y^2 x)\, dy,$$

onde C representa a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido directo.

79. Seja C a curva de equações paramétricas

$$x(t) = a\cos t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad y(t) = \begin{cases} a \sin t, & t \in [0,\pi] \\ 0, & t \in]\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Usando o Teorema de Green, determine $\underline{a}$ por forma a que

$$\int_C x\, dx + xy\, dy = 18.$$

R: $a = 3$

80. Seja

$$F(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}\,.$$

(a) Prove que $\int_C F \cdot d\vec{r}$ tem sempre o mesmo valor, qualquer que seja a curva C fechada, simples e parcialmente suave que circunda a origem.

(b) Prove que esse valor é 2π.

(c) Prove ainda que, se a curva C não circundar nem passar na origem, então $\int_C F \cdot d\vec{r} = 0$.

81. Seja r um parâmetro real positivo e diferente de $\sqrt{2}$. Discuta, para os diferentes valores de r, o valor de

$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\,,$$

sendo C a curva plana de equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$.

R: 0, se $r < \sqrt{2}$; 2π, se $r > \sqrt{2}$

2.6 Integral de Superfície de uma função escalar

2.6.1 Cálculo do Integral de Superfície de uma função escalar

Sejam $S = \{(x,y,z) : (x,y,z) = \varphi(u,v);\ (u,v) \in D\}$, com $\varphi : D \subseteq\longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 e $f : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\varphi(u,v))\,\|\vec{n}(u,v)\|\,dudv, \qquad \text{com } \vec{n}(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v).$$

82. Calcule os seguintes integrais de superfície

(a) $\iint_S z^2\,dS$, onde S é a porção da superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelos planos $z = 1$ e $z = 3$;

R: $40\sqrt{2}\pi$

(b) $\iint_S z\,dS$, onde S é o elipsóide de equação $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; R: 0

(c) $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, onde S é a reunião da porção do parabolóide

$$z = 1 - (x^2+y^2),$$

situada acima do plano XOY, com a porção desse mesmo plano definida por

$$x^2 + y^2 \leq 1;$$

R: $\frac{25\sqrt{5}+1}{60}\pi + \frac{\pi}{2}$

(d) $\iint_S x\,dS$, onde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 2x \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

R: $\frac{32}{3}$.

83. Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq x + 3\}.$$

Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\iint_S y^2 \, dS$; R: 24π

(b) $\displaystyle\iint_S z^2 \, dS$. R: 60π

2.6.2 Aplicações do Integral de Superfície de uma função escalar

A área da superfície S, definida por $S = \{(x, y, z) : (x, y, z) = \varphi(u, v);\ (u, v) \in D\}$, é dada por

$$A(S) = \iint_S dS.$$

84. Calcule a área de superfície de S quando:

(a) S é uma superfície esférica de raio igual a a, com $a > 0$; R: $4\pi a^2$

(b) S é composta pela porção do parabolóide $x^2 + y^2 = 4 - z$, situada acima do plano XOY, e pela porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada abaixo desse mesmo plano;
R: $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) + 8\pi$

(c) S é a superfície que limita o sólido Q definido por

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z - 6)^2 \leq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 6\}.$$

R: $36\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$

85. Calcule a área das superfícies definidas parametricamente por:

(a) $\begin{cases} x = u + v \\ y = u \\ z = v \end{cases}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array};$ (b) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \\ z = r \end{cases}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}.$

2.7 Integral de Superfície de uma função vectorial

2.7.1 Cálculo do Integral de Superfície de uma função vectorial

Consideremos $S = \{(x, y, z) : (x, y, z) = \varphi(u, v);\ (u, v) \in D\}$ uma superfície orientada, sendo $\widehat{n}$ o campo de vectores, normal e unitário, que lhe determina a orientação.
Seja ainda $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vectorial.

$$\iint_S F(x, y, z) \cdot dS = \iint_S (\, F(x, y, z) \cdot \widehat{n}\,)\, dS = \iint_D F(\varphi(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v)\, dudv,$$

com $\vec{n}(u, v) = \pm(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v))$, dependendo o sinal da orientação da superfície.

86. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ quando:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ e S é a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que fica situada acima do plano XOY, com $\hat{n}$ dirigida para cima;
R: 72π

(b) $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2x^2\hat{k}$, sendo S a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$, limitada pelas superfícies $x = 1 - y^2$ e $x = y^2 - 1$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para baixo;

R: 0

(c) $\vec{F}(x,y,z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para dentro;

R: $-\frac{32}{3}\pi$

(d) $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ e S é definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = r^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq h\} \quad (r > 0,\, h > 0)$$

e orientada com $\hat{n}$ a apontar para o exterior.

R: $\frac{r^2h^2}{8}\pi + \frac{hr^3}{3}$

(e) $F\,(x,y,z) = (xz, y, z)$ e S é definida por

$$S = \Big\{(x,y,z) \in 1^o\text{octante} \,:\, y = x^2,\ 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4\Big\}$$

e orientada com $\hat{n}$ dirigida para a parte positiva do eixo Ox.

R: 0

87. Considere a superfície S definida por: $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^2 \end{cases}$, $\begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array}$.

(a) Determine um campo de vectores normal a S.

(b) Calcule a área de S.

(c) Considere S orientada com a orientação canónica e $\hat{n}$ o campo de vectores normal associado a essa orientação.

Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$.

88. Calcule o fluxo de

$$F\,(x,y,z) = \left(\sin\,(xyz)\,, x^2y, z^2e^{\frac{x}{5}}\right)$$

através da parte do cilindro

$$4x^2 + z^2 = 4$$

situada acima do plano xOy e entre os planos $y = -2$ e $y = 2$, com orientação para cima.

R: $800\left(-4\sqrt[5]{e} + 6\sqrt[5]{e^{-1}}\right)$.

89. Seja $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ o campo vectorial que representa a velocidade (em m/s) de uma corrente de fluido.

(a) Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano XOY através do quadrado definido por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

R: 0 m^3

(b) Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano $z = 1$ através do quadrado definido por $z = 1$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

R: 0.5 m^3

2.7.2 Teorema de Stokes

Sejam S uma superfície orientada com a normal $\widehat{n}$ definida por

$$S = \{(x, y, z) : (x, y, z) = \varphi(u, v);\ (u, v) \in D\}.$$

e F uma função vectorial.

$$\iint_S rotF \cdot \widehat{n}\ dS = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz,$$

onde a curva $C = \varphi\left(fr\left(D\right)\right)$, tem orientação induzida por $\widehat{n}$.

90. Usando o Teorema de Stokes, transforme o integral de superfície $\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$ num integral curvilíneo e calcule o seu valor, para cada um dos casos seguintes:

    (a) $\vec{F}(x, y, z) = 2y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e S é a superfície do parabolóide $z = 1-(x^2+y^2)$, situada acima do plano XOY, com a orientação canónica. R:-2π

    (b) $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{\imath} - y\hat{\jmath} - x^2y\hat{k}$, S é composta pelas 3 faces, não situadas no plano XOZ, do tetraedro limitado pelos 3 planos coordenados e pelo plano $3x+y+3z = 6$, com orientação determinada pela normal unitária exterior do tetraedro. R: $\frac{4}{3}$

91. Usando o Teorema de Stokes, mostre que cada um dos seguintes integrais curvilíneos tem o valor indicado. Em cada caso diga em que sentido é que a curva C é percorrida, para obter o resultado pretendido.

    (a) $\oint_C (x^2 - yz)\ dx + (y^2 - zx)\ dy + (z^2 - xy)\ dz = 0$, com C uma curva simples, fechada e parcialmente suave.

    (b) $\oint_C y\ dx + z\ dy + x\ dz = -\pi$, sendo C a circunferência $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

    (c) $\oint_C y\ dx + z\ dy + x\ dz = \pi\sqrt{3}$, sendo C a curva de intersecção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$.

    (d) $\oint_C (y + z)\ dx + (z + x)\ dy + (x + y)\ dz = 0$, sendo C a curva de intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

92. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (x - 1)\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$ e S a superfície definida por $z = 4 - y^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

    (a) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, supondo S com orientação canónica.

    (b) Use a alínea anterior para calcular $\oint_C x^2\ dx + z\ dy + xy\ dz$, sendo C a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 4 - y^2$, para as duas orientações possíveis de C.

93. Considere a superfície

    $$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 2\right\},$$

    a curva

    $$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \wedge x^2 + y^2 = 1\right\},$$

    orientada no sentido negativo e a função $F\left(x, y, z\right) = \left(-2xz, g\left(x, y\right), y^2\right)$.

(a) Recorrendo a um integral de superfície sobre S, calcule

$$\int_C -2xzdx + g(x,y)\,dy + y^2dz,$$

em que g é uma função de classe C^2 e $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. (R: $\frac{-2(4\sqrt{2}-1)\pi}{5}$)

(b) Indique, justificando devidamente, o valor de

$$\iint_{S_1} (rotF \mid \widehat{n})\ dS,$$

em que $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 2\right\}$ e $\widehat{n}$ representa a normal a S_1, unitária e orientada para cima.

2.7.3 Teorema da Divergência

Seja $E \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto simplesmente conexo, F uma função vectorial e $S = fr(E)$ admite plano tangente em todos os pontos.

$$\iint_S F \cdot \widehat{n}\ dS = \iiint_E divF\ dxdydz,$$

em que $\widehat{n}$ representa a normal a S, exterior e unitária.

94. Utilizando o Teorema da Divergência, calcule:

(a) $\iint_S (yz, xz, xy) \cdot \hat{n}\ dS$ onde S é composta pelas faces do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 3$, e $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S; R: 0

(b) $\iint_S \left(x^2, y^2, z^2\right) \cdot \hat{n}\ dS$ onde $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S e

i. S é composta pelas faces do cubo de vértices

$$(0,0,0),\ (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2),\ (2,2,0)\ \text{ e }\ (2,2,2); \qquad R: 48$$

ii. S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$; R: $\frac{\pi}{2}$

iii. S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2+y^2) \leq z^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$. R: $\frac{\pi}{8}$

95. Considere o sólido V definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 25 \text{ e } z \geq 3\}.$$

Sendo $\hat{n}$ a normal exterior a S, com $S = fr(V)$, calcule

$$\iint_S (xz, yz, 1) \cdot \hat{n}\ dS$$

(a) utilizando a definição;

(b) usando o teorema da divergência. R: 128π

96. O filtro de uma máquina de lavar loiça tem a forma aproximada da superfície que é a fronteira do conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\},$$

e está imerso, durante a lavagem, numa corrente de água com uma velocidade dada pelo campo

$$F(x, y, z) = \left(2yz \cos y^2, 2xz \cos x^2, 1\right).$$

(a) Mostre que a quantidade da água no interior do filtro se mantém constante durante a lavagem.

(b) Calcule o fluxo de água que atravessa o filtro, através da sua parede curva. Interprete o resultado obtido. R: -9π

97. (a) Calcule o volume do sólido Q determinado por $2z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ e $x^2 + y^2 \leq z^2$.

(b) Sejam $F(x, y, z) = (2x + y^2, 3y + z^3, 4z + e^{x^4})$ e S a fronteira de Q orientada com normal exterior. Determine o valor de $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

98. Considere o conjunto

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

(a) Calcule $\iiint_V z\ dx\ dy\ dz$. (R: : $\frac{15\pi}{8}$)

(b) Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\ dS$, onde S é a fronteira de V, orientada com a normal interior e

$$\overrightarrow{F} = \left(x^2y + 2xz, z - xy^2, z^2 + xy\right). \qquad \text{R: } -\frac{15\pi}{2}$$

99. Seja Q a região limitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$, o plano $y + z = 5$ e os planos coordenados xOy e xOz.

(a) Faça um esboço da região Q.

(b) Sejam ainda

$$F = \left(x^3 + e^{-y} \sin z, x^2y + \arctan z, \sqrt{y} \sec x\right)$$

e S a fronteira de Q, orientada com a normal $\widehat{n}$, exterior e unitária. Através de integrais simples iterados, apresente uma expressão que permita determinar

$$\iint_S (F \mid \widehat{n})\ dS.$$