Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Topologia e Análise Linear

Duração: 2 horas e 30 minutos 21-7-2006

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ a métrica $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$, definida por:
$$d((x,y),(a,b)) = \begin{cases} |x-a| & \text{se } y = b \\ |x-a|+1 & \text{se } y \neq b \end{cases}.$$
   (a) Defina espaço métrico e mostre que d verifica a desigualdade triangular.
   (b) Determine $B_1(0,0)$ e $B_2(0,0)$.
   (c) Calcule o interior e o fecho de um conjunto, não vazio e diferente de $\mathbb{R}^2$, à sua escolha.
   (d) Qual dos seguintes subespaços de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ com a topologia usual:
   $\mathbb{R} \times \{0\}$; $\{0\} \times \mathbb{R}$; $\{(x,y) : x = y\}$. Justifique.
   (e) Indique qual destes subespaços de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d)$ não é compacto:
   $\mathbb{R}^2$; $[0,1] \times \{0\}$; $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Justifique.
   (f) Averigúe se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d)$ é um espaço conexo ou separado.
   (g) Será que d é induzida por uma norma em $\mathbb{R}^2$?

2. Considere o espaço vectorial real $\mathcal{L}([-1,1])$ das funções limitadas de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$.
   (a) Mostre que $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [-1,1]\}$ é uma norma em $\mathcal{L}([-1,1])$.
   (b) Prove que esta norma não é induzida por um produto interno.
   (c) Considere o operador linear $T : \mathcal{L}([-1,1]) \longrightarrow \mathcal{L}([-1,1])$, com
   $$T(f)(x) := T_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ f(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$
   Mostre que T é um operador limitado e calcule a sua norma.
   (d) Enuncie o Teorema do Gráfico Fechado e diga se $A = \{(f, T(f)) : f \in \mathcal{L}([-1,1])\}$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{L}([-1,1]) \times \mathcal{L}([-1,1])$ com a topologia produto.

3. Sejam V um espaço vectorial real de dimensão finita, $(e_i)_{i=1}^n$ uma base de V e
$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ uma norma em V.
   (a) Seja $S_1 = \{x \in V : \|x\|_1 = 1\}$ e consideremos uma outra norma $\|.\|$ em V.
   Mostre que para $f : (S_1, \|.\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|$, existe $k > 0$ tal que para todo $x, y \in S_1$, $|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|_1$.
   (b) Sabendo que $(S_1, \|.\|_1)$ é compacto, conclua que f é uma função limitada.
   (c) Prove que quaisquer duas normas em V são equivalentes. (Em particular prove que $\|.\|$ e $\|.\|_1$ são equivalentes.)

4. Consideremos o espaço vectorial real das funções contínuas de $[0, 2\pi]$ em $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0, 2\pi])$, munido do produto interno do integral e a sucessão ortonormada $(\frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}})_{k\in\mathbb{N}}$.
   (a) Determine a série de Fourier desta sucessão associada à função $f(t) = \sin t$.
   (b) Será que a sucessão ortonormada $(\frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}})_{k\in\mathbb{N}}$ é completa?

Cotação: **1.** – 9,0 ; **2.** – 5,0 ; **3.** – 3,5 ; **4.** – 2,5 .