

A Considere uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto X e $B \subseteq X$.

1. Verifique que $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ e que $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.
2. Mostre que se $I = \emptyset$, então $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ e $\bigcap_{i \in I} A_i = X$.

B Sejam A, B subconjuntos de X e C, D subconjuntos de Y .

1. Verifique que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ e que $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
2. Mostre que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
3. Será que $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$?
4. A partir das alíneas (a) e (b), escreva $(X \times Y) \setminus (A \times C)$ como uma reunião de conjuntos.

C 1. Sejam $(a_i)_{i \in I}$ e $(b_i)_{i \in I}$ duas famílias de números reais. Mostre que

$$\sup\{a_i \mid i \in I\} + \sup\{b_i \mid i \in I\} \geq \sup\{a_i + b_i \mid i \in I\}.$$

2. Exiba um contra-exemplo que mostre que a desigualdade contrária não se verifica.
3. Sejam agora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões crescentes de números reais. Verifique que neste caso

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

D A partir da desigualdade de Hölder:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}; \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}; \quad p, q > 1 \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

mostre a desigualdade de Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}; \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}; \quad p \geq 1.$$

E Mostre que, se X e Y são conjuntos e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação, então, se A, A' e A_j ($j \in J$) são subconjuntos de X e B, B' e B_i ($i \in I$) são subconjuntos de Y ,

1. $A \subseteq A' \Rightarrow f(A) \subseteq f(A')$; 2. $B \subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$;
3. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$; 4. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$; 5. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;
6. $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$; 7. $f\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$; 8. $f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in J} f(A_j)$;
9. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$; 10. $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

11. Apresente exemplos que mostrem que as inclusões das alíneas 3, 4, 6 e 8 podem ser estritas;
12. Indique uma condição que permita substituir o sinal de inclusão – em 3, 4, 6 e 8 – pelo de igualdade;
13. Mostre que na alínea 8 não se pode substituir $f(X)$ por Y .

1. (a) Verifique se $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica em \mathbb{R} :

i.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 + |x - y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

ii.

$$d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

iii. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

iv. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$.

(b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

2. (a) Mostre que (\mathbb{R}^n, d_j) é um espaço métrico para $n, j \in \mathbb{N}$ e $d_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_j(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^j \right)^{\frac{1}{j}},$$

com $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

(b) Averigue se d_∞ , definida por $d_\infty(x, y) = \lim d_j(x, y)$, é uma métrica em \mathbb{R}^n .

3. Represente geometricamente em \mathbb{R}^2 a bola aberta $B_1(0, 0)$ para as métricas d_1, d_2 e d_∞ do exercício anterior.

4. Prove que (X, d) é um espaço métrico para todo o conjunto X e

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

5. Sejam X um conjunto e d' uma métrica em X . Verifique quais das funções $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em seguida são métricas em X :

(a) $d(x, y) = k d'(x, y)$ para algum número real não negativo k ;

(b) $d(x, y) = \min\{1, d'(x, y)\}$;

(c) $d(x, y) = \frac{d'(x, y)}{1 + d'(x, y)}$;

(d) $d(x, y) = (d'(x, y))^2$.

6. Seja X um espaço vectorial real. X diz-se um **espaço vectorial normado** se em X estiver definida uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, designada por **norma**, que verifique as seguintes condições para todos os $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

N1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(a) Prove que todo o espaço vectorial normado é um espaço métrico com a métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

(b) Mostre que o recíproco do resultado da alínea anterior não se verifica em geral, exibindo um espaço métrico cuja métrica não seja induzida por nenhuma norma.

7. Seja d um métrica em X , para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \leq 1$. Consideremos a função $s : X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$s((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(x_n, y_n).$$

Mostre que $(X^{\mathbb{N}}, s)$ é um espaço métrico.

8. No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral:

$$\rho(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [0, 1]\},$$

$$\sigma(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

- (a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1 - x, x^2)$.
- (b) Sejam $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de \mathbb{R}^2 onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ .
- (c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de \mathbb{R}^2 onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ ?
9. Sejam (X, d) um espaço métrico e x e y elementos de X .
- (a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.
- (b) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$? Justifique.

10. Sejam (X, d) um espaço métrico e a um ponto de X . Mostre que:

$$(a) \{a\} = \bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a);$$

$$(b) B_r[a] = \bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a).$$

11. Seja (X, d) um espaço métrico.

- (a) Mostre que uma bola fechada é sempre um conjunto fechado em X .
- (b) Dê um exemplo que mostre que uma bola aberta pode ser um conjunto fechado.

12. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} são abertos ou fechados:

- (a) \mathbb{N} ; (b) $[1, 2] \cup]2, 3[$; (c) $\{0\} \cup \{x; x^2 > 2\}$;
 (d) \mathbb{Q} ; (e) $[5, 7] \cup \{8\}$; (f) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

13. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em \mathbb{R}^2 :

- (a) $]0, 1[\times]0, 1[$; (b) $[0, 1[\times]0, 1[$; (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$; (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$.

14. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em \mathbb{R} , munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto

$$A = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ f(x) > 0\}$$

de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Mostre que:

- (a) se $X = [0, 1]$, então A é aberto.
 (b) se $X =]0, 1]$, então A não é aberto.
15. Considere o conjunto $X = [0, 1]$ e a métrica s do Exercício 7 no conjunto das sucessões em X . Verifique se o conjunto $A = \{(x_n)_n \mid \forall n \ x_n > 0\}$ é um conjunto aberto.
16. No conjunto das sucessões limitadas em \mathbb{R} , $L_\infty(\mathbb{R})$, consideremos a norma dada por $\|(x_n)_n\| := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Mostre que $(L_\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ é um espaço normado.
 (b) Verifique se $B = \{(x_n)_n \mid \exists k, i \ x_k > 1, x_i < 0\}$ é um conjunto aberto.

17. Considere a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 + |x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em \mathbb{R} . Verifique porém que, se d é a métrica definida no Exercício 1(a)i, então a função $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

18. Considere em \mathbb{R} a métrica usual d_1 e a métrica d definida em 1(a)ii. Verifique se alguma das funções $f, g : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

19. (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ (Exercício 2) definem a mesma topologia em \mathbb{R}^2 .
 (b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício 5 são topologicamente equivalentes a d' .
 (c) Compare as topologias definidas em \mathbb{R} pelas métricas do Exercício 1.
20. Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} , as métricas ρ do supremo e σ do integral.

- (a) Sendo $0 < r \leq 2$, considere

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r} + 4 & \text{se } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Mostre que $g \in B_r^\sigma(f) \setminus B_1^\rho(f)$, onde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2$.

- (b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.
 (c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma \subset \mathcal{T}^\rho$.

21. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a, b, c, d, e\}$:
- $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,
 - $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,
 - $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$,
 - $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.
22. Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[\mid q \in \mathbb{Q}\}$ não é uma topologia em \mathbb{R} .
23. Considere o conjunto $\mathcal{T} := \{A \subseteq \mathbb{R}; \mathbb{R} \setminus A \text{ é um conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Mostre que \mathcal{T} é uma topologia.
[A esta topologia chama-se topologia cofinita]
24. Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X , mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X . O que poderemos dizer acerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X ?
25. Dê exemplo de duas topologias \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.
26. Prove que, se $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}'_1)$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}'_1 \subseteq \mathcal{T}'$.
27. Considere a topologia $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.
28. Considere \mathbb{R} munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então \mathcal{T} é a topologia discreta em X .
29. Considere a topologia usual em \mathbb{R} e a topologia cofinita (Exercício 23). Prove que todo o subconjunto finito de \mathbb{R} é fechado.
30. Determine os subconjuntos fechados do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde
- $$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$
31. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Considere a função característica, $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por
- $$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$
- Prove que, se χ é contínua, então A é simultaneamente aberto e fechado;
 - Prove que, se A é aberto e fechado, então χ é contínua.
32. Mostre que:
- o intervalo $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$;
 - qualquer intervalo aberto de \mathbb{R} é homeomorfo a \mathbb{R} .
 - o intervalo $[0, 1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0, 1[$.
33. Considere as letras do alfabeto. Diga quais delas definem subespaços de \mathbb{R}^2 homeomorfos. Por exemplo O e D definem espaços homeomorfos.

34. Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.
35. Seja \mathcal{T} a topologia usual em \mathbb{R} .
- Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ no conjunto \mathbb{N} .
 - Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0, 1]$ é aberto em $[0, 1]$:
 - $]1/2, 1]$;
 - $]1/2, 2/3]$;
 - $]0, 1/2]$.
36. Considere a topologia \mathcal{U} do Exercício 27. $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Determine a topologia relativa de $[0, 1]$ induzida por $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
37. Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.
- Mostre que \mathcal{T}_0 é uma topologia em \mathbb{R} .
 - Determine a topologia relativa de $]-\infty, 0]$ e de $]0, +\infty[$ induzida por \mathcal{T}_0 .
 - Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas
38. Sejam $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A .
- Mostre que, se \mathcal{T}_A é a topologia relativa definida em A por \mathcal{T} , então $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.
 - Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.
39. Mostre que $\mathcal{B} = \{]r, s[\mid r, s \in \mathbb{Q}, r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em \mathbb{R} .
40. Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.
41. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por \mathcal{U} quando:
- $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$;
 - $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$.
42. Determine a topologia em \mathbb{R} gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x + 1]; x \in \mathbb{R}\}$.
43. Considere em \mathbb{R} a topologia usual \mathcal{T} e a topologia \mathcal{T}' que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Mostre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

44. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e $f : X \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b])$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0, 1[$, então f é contínua.
45. Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

46. Considere a seguinte topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Indique as vizinhanças dos pontos c e d .

47. Considere a topologia \mathcal{T}_0 do Exercício 37. Descreva as vizinhanças dos pontos -2 e 3 relativamente a essa topologia.

48. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e A e B dois subconjuntos de X . Mostre que:

- (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
- (b) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ e $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$;
- (c) as inclusões anteriores podem ser estritas.

49. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que:

- (a) $\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$;
- (b) $\overline{A} = A \cup \text{fr}A$;
- (c) $\text{fr}A = \emptyset \Leftrightarrow A$ aberto e fechado;
- (d) $X = \text{int}(A) \cup \text{fr}A \cup \text{int}(X \setminus A)$.

50. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico metrizável, sendo \mathcal{T} definida pela métrica d . Prove que a bola fechada $B_\delta[x]$ é fechada em X , mas nem sempre é o fecho de $B_\delta(x)$.

51. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e A um subconjunto de X . Prove que as seguintes equivalências não se verificam, exibindo contra-exemplos:

- (a) A é aberto se e só se $A = \text{int}(\overline{A})$;
- (b) A é fechado se e só se $A = \overline{\text{int}(A)}$.

52. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e $A \subseteq X$. Compare $\text{fr}(\text{int}(A))$, $\text{fr}(A)$ e $\text{fr}(\overline{A})$.

53. Calcule o interior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

- (a) $A =]0, 1] \cup \{2\}$;
- (b) $B = \mathbb{R}$;
- (c) $C = \mathbb{Q}$;
- (d) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
- (e) $E = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- (f) $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

54. (a) Mostre que o conjunto \mathcal{T} , constituído por \mathbb{N} , pelo vazio e pelos conjuntos da forma $K_n = \{1, 2, \dots, n\}$, é uma topologia no conjunto dos números naturais.

- (b) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

55. Determine o interior, o fecho, a fronteira, o conjunto derivado e o conjunto dos pontos isolados de $A = [7, +\infty[$, $B = [3, 7[$ e $C = \mathbb{N}$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, quando:
- \mathcal{T} é a topologia euclidiana;
 - $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;
 - $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

56. Considere $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, o conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$ munido da métrica do supremo e o conjunto

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(x) > 0\} \cup \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(x) \leq -x\}$$

.

Determine o interior, o fecho e os pontos isolados de A .

57. Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ no conjunto $X = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ no conjunto $Y = \{u, v\}$. Determine uma base \mathcal{B} da topologia produto em $X \times Y$.
58. Determine uma base para a topologia produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ quando \mathcal{T} é a topologia da alínea (b) do Exercício 55.
59. Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o seu espaço produto. Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, mostre que:
- $\text{int}(A \times B) = \text{int}(A) \times \text{int}(B)$;
 - $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
60. No espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifique se as sucessões $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ são convergentes, e, em caso afirmativo, para que números reais convergem, quando:
- \mathcal{T} é a topologia euclidiana;
 - \mathcal{T} é a topologia discreta;
 - \mathcal{T} é a topologia indiscreta;
 - \mathcal{T} é a topologia cofinita;
 - $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;
 - $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;
 - \mathcal{T} é a topologia gerada pela base $\{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
61. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em (X, d) se e só se a sucessão $(d(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 em \mathbb{R} .
62. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é separado quando \mathcal{T} é definida como em cada alínea do Ex. 60.
63. Considere, em \mathbb{R}^2 , a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r; r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y) ; \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ não é separado.
64. Prove que, se X é finito, (X, \mathcal{T}) é um espaço separado se e só se \mathcal{T} é a topologia discreta.

65. (a) Mostre que, se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e injectiva e Y é um espaço separado, então também X é separado.
(b) Conclua que todo o subespaço de um espaço separado é separado.
(c) Dê um exemplo de um espaço não separado com um subespaço não trivial separado.
66. Mostre que o produto de dois espaços separados é separado.
67. (a) Mostre que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^2 .
(b) Conclua que as projecções de um espaço produto nos factores nem sempre são aplicações fechadas. (Sugestão: Considere o conjunto A da alínea anterior e mostre que $p_{\mathbb{R}}(A)$ não é fechado.)
68. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo, quando:
(a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathcal{T} = \{A; A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;
(c) \mathcal{T} tem como base $\{]a, b[; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
69. Quais dos seguintes subespaços de \mathbb{R}^2 são conexos?
(a) $B_1(1, 0) \cup B_1(-1, 0)$;
(b) $\overline{B_1(1, 0)} \cup B_1(-1, 0)$;
(c) $\{(q, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in [0, 1]\} \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$;
(d) o conjunto de todos os pontos que têm pelo menos uma coordenada em \mathbb{Q} ;
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{x}\}$.
70. Dê exemplos de:
(a) conexos de \mathbb{R}^2 cuja intersecção seja desconexa;
(b) uma sucessão decrescente de conexos de \mathbb{R}^2 cuja intersecção seja desconexa.
71. (a) Dê um exemplo de um conexo de \mathbb{R}^2 (diferente de \emptyset e de \mathbb{R}^2):
i. X_1 tal que o complementar de X_1 seja conexo;
ii. X_2 tal que o complementar de X_2 tenha duas componentes conexas;
iii. X_4 tal que o complementar de X_4 tenha quatro componentes conexas;
iv. X tal que o complementar de X tenha uma infinidade de componentes conexas.
(b) Se os problemas de (a) fossem postos relativamente a \mathbb{R} (em vez de \mathbb{R}^2), que respostas daria? Porquê?
72. Mostre que se o espaço X , não singular, é conexo e separado, então não tem pontos isolados.
73. Considere $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ o espaço topológico definido no Exercício 54.
(a) Verifique que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é conexo.
(b) A partir da alínea anterior, mostre que toda a função contínua $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ é constante.
74. Verifique que $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo mas não é conexo por arcos.

75. (a) Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de \mathbb{R}^2 .
 (b) Será necessariamente contínua uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico seja conexo?
76. Mostre que os seguintes conjuntos são conexos por arcos:
- (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n > 1$;
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;
 (c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$.
77. Usando, resultados sobre conexidade, mostre que \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 não são homeomorfos.
78. Sejam \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 duas topologias definidas num conjunto A tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Mostre que, se (A, \mathcal{T}_2) é compacto, então (A, \mathcal{T}_1) também é compacto.
79. Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 são compactos?
- (a) $[0, +\infty)$; (b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$; (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
 (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$; (e) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$.
80. Verifique se os subconjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , $\{-2\} \cup]-1, 0[$ e $]0, 1[$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ são compactos, quando:
- (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$;
 (b) $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.
81. Considere em \mathbb{R} a topologia \mathcal{T}' que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Mostre que o intervalo $]0, 1[$ (com a topologia de subespaço de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$) não é compacto.
82. Seja X um espaço topológico. Mostre que:
- (a) a reunião finita de subespaços compactos de X é um compacto;
 (b) se X é um espaço de Hausdorff, então a intersecção de qualquer família de subespaços compactos de X é ainda um compacto;
 (c) no resultado da alínea anterior é fundamental a hipótese de que o espaço topológico X seja de Hausdorff;
 (d) um subespaço compacto nem sempre é fechado.
83. Seja A um subconjunto de \mathbb{R} . Mostre que, se A não é compacto, então:
- (a) existe uma aplicação contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que não é limitada;
 (b) existe uma aplicação contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que, embora limitada, não tem máximo.
84. Considere em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a métrica usual. Mostre que existem subespaços fechados e limitados de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que não são compactos.
85. Considere em \mathbb{R} a métrica d definida por $d(x, y) = |x| + |y|$ se $x \neq y$ (Exercício 1(a)ii).
 Mostre que o conjunto $] -1, 1[$:
- (a) é fechado e limitado;
 (b) não é compacto.

86. Diga se o espaço métrico X é completo, quando:

- (a) $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;
- (b) $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
- (c) $X = [0, 1] \cup [2, 3]$;
- (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y \geq 1/x\}$;
- (e) X é discreto.

87. Mostre que os espaços métricos definidos nos exercícios 1(a)i e 1(a)ii são completos. Verifique se são totalmente limitados.

88. Considere em \mathbb{R} a métrica d definida por $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Mostre que (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico completo.

89. Mostre que, num espaço métrico:

- (a) a união finita de subespaços completos é um subespaço completo;
- (b) a união infinita de subespaços completos nem sempre é um subespaço completo;
- (c) a intersecção de qualquer família de subespaços completos é ainda um subespaço completo.

90. Considere, no conjunto das funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} munido da métrica do integral, a sucessão $(f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Mostre que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.
- (b) Mostre que este espaço não é completo.

(Sugestão: Mostre que a sucessão da alínea (a) não é convergente.)

91. Considere o espaço l_∞ , as sucessões reais limitadas com a métrica (norma) do supremo.

- (a) Verifique se l_∞ é completo.
- (b) Mostre que não é totalmente limitado.
- (c) Que pode dizer sobre a compacidade deste espaço?
- (d) Mostre que o subespaço de l_∞ das sucessões finitas, i.e. as sucessões que são nulas a partir de certa ordem, não é completo. Qual é o seu completamento.

92. (a) A imagem de uma sucessão de Cauchy em X por uma função contínua $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ pode não ser uma sucessão de Cauchy em Y . Dê um exemplo.

- (b) O que acontece se X for completo?

93. Dê exemplos de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um deles completo e o outro não.

94. Diga se é ou não verdade que toda a função (entre espaços métricos) cujo domínio está munido da métrica discreta é uniformemente contínua.

95. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, é contínua mas não é uniformemente contínua.
96. (a) Mostre que, se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então é limitada.
 (b) Indique uma tal função f e uma sucessão de Cauchy em $]a, b[$ cuja imagem por f não seja uma sucessão de Cauchy em \mathbb{R} .
 (c) Mostre que se $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua e X é totalmente limitado, então Y é totalmente limitado.
97. (a) Mostre que, se $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sucessão de Cauchy, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy.
 (b) Mostre que a função $g : [1, +\infty[\rightarrow]0, 1]$, com $g(x) = \frac{1}{x}$, é uniformemente contínua.
 (c) Conclua que a imagem por uma função uniformemente contínua de um espaço completo pode não ser um espaço completo. (Note que g é uma bijecção uniformemente contínua com inversa contínua.)
 (d) Mostre, no entanto, que, se $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é uma aplicação bijectiva, uniformemente contínua, com inversa uniformemente contínua, então (X, d) é completo se e só se (Y, d') for completo.
98. Mostre que se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são dois completamentos do mesmo espaço métrico, então são isométricos.

[Isto significa que o completamento é único, a menos de uma isometria.]

99. Considere o conjunto dos polinómios complexos

$$Y := \left\{ f : f = \sum_{k=0}^n c_k t^k, c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad \|f\| := \sum_{k=0}^n |c_k|.$$

Verifique se $(Y, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

100. Considere o conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais quadradas de ordem n . Verifique se $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ é um espaço normado para cada uma das seguintes normas:
- (a) $\|A\| := \sup\{a_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n\}$;
 (b) $\|A\| := |\det A|$;
 (c) $\|A\| := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) a_{ij}$.
101. Define-se uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} de expressão analítica $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2 + 4|x||y|}$.
- (a) Mostre que esta função não é uma norma.
 (b) Será que induz uma métrica em \mathbb{R}^2 ?
102. Mostre que em todo o espaço vectorial normado não nulo o diâmetro de qualquer bola aberta é igual ao dobro do respectivo raio.
103. Seja X um espaço vectorial normado e d uma métrica em X . Prove que d é induzida por uma norma se e só se

$$(\forall x, y \in X) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad d(x+a, y+a) = d(x, y) \quad \text{e} \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y).$$

104. (a) Seja d' a métrica Euclidiana em \mathbb{R} . Para cada uma das métricas do Exercício 5, averigüe se d é induzida por uma norma.
- (b) Mostre que a métrica s do Exercício 7 não é induzida por uma norma.
105. Seja d uma métrica no espaço vectorial X induzida por uma norma. Mostre que o complemento de (X, d) é ainda induzida por uma norma (sendo portanto um espaço de Banach).
106. Seja X um espaço vectorial normado.
- (a) i. Prove que, se X é um espaço normado, $a \in A$ e $r > 0$, então $B_r(a) = a + rD$, onde D é a bola unitária.
- ii. Conclua que num espaço vectorial normado X duas bolas abertas (respectivamente fechadas) com o mesmo raio são isométricas, isto é, quaisquer que sejam $a, b \in X$, existe uma bijecção $B_r(a) \rightarrow B_r(b)$ que preserva a métrica.
- iii. Mostre que para espaços métricos em geral este resultado é falso.
- (b) i. Sejam X um espaço normado, $a \in X$ e $r > 0$. Mostre que:
- A. $\overline{B_r(a)} = B_r[a]$;
- B. $\text{fr}(B_r(a)) = \{x \in X; d(x, a) = r\}$. [A fronteira da bola aberta é a esfera.]
- ii. Dê exemplos de espaços métricos onde as igualdades anteriores não se verifiquem.
107. Seja X um espaço normado. Mostre que para todo o $x, y \in X$ se tem $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
108. Prove que, se X é um espaço normado, então:
- (a) o operador linear $X \times X \rightarrow X$
 $(x, y) \mapsto x + y$ é limitado;
- (b) a aplicação $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$
 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ é contínua;
- (c) a norma $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$ é uniformemente contínua.
109. Nos exemplos seguintes verifique se T é um operador linear limitado. Em caso afirmativo calcule a sua norma.
- (a) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $T : l_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(x) = A.x$, para A uma matriz linha $1 \times n$.
- (b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $T : l_2^n \rightarrow l_2^m$ definido por $T(x) = (x_1, \dots, x_l, 0, \dots, 0)$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $l = \min(m, n)$.
- (c) No espaço $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ munido da métrica do supremo escolhe-se $t_0 \in [0, 1]$ e define-se $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $T(f) = f(t_0)$.
- (d) No subespaço de $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções diferenciáveis com derivada contínua, define-se $T : X \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ por $T(f) = f'$.
- (e) $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $T(f) = \int_0^1 f(t) dt$.
110. Sejam Y e Z subespaços vectoriais de X tais que $Y \cap Z = 0$ e $Y + Z = X$. Mostre que:
- (a) $X = Y \oplus Z$ se e só se X tem a topologia produto, quando identificado com $Y \times Z$.
- (b) Se $X = Y \oplus Z$, então a projecção $X \rightarrow Y$ induz um isomorfismo $X/Z \rightarrow Y$.

111. Se X e Y são espaços normados, prove que

$$\|(x, y)\|_1 = \|(\|x\|, \|y\|)\|_1 \quad \text{e} \quad \|(x, y)\|_\infty = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\infty$$

são normas no espaço soma directa $X \oplus Y$. Mostre que estas normas são equivalentes.

112. Considere $\mathcal{C}[-1, 1]$ munido da norma do integral, i.e. $\|f\| = \int_{-1}^1 |f(t)| dt$.

(a) Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, com $h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ -nx + 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$.

(b) Diga porque $\mathcal{C}[-1, 1]$ não é completo.

(c) Averigúe se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ é absolutamente convergente.

113. Seja $(\|\cdot\|_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de normas no espaço vectorial V . Prove que $\|\cdot\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ é uma norma em V , mas, em geral, $\inf_{\gamma \in \Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ não é uma norma.

114. Seja Y um subespaço do espaço normado X . Prove que Y é um subespaço fechado se e só se a sua bola fechada unitária é fechada em X .

115. (a) Seja Z um subespaço fechado do espaço normado X . Verifique que a projecção $X \rightarrow X/Z$ no espaço normado quociente é um operador linear limitado. Calcule a sua norma.

(b) Sejam $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado, $Z = \ker T$ e $T_0 : X/Z \rightarrow Y$ o operador linear limitado definido por T . Prove que $\|T_0\| = \|T\|$.

116. Seja Y um subespaço fechado do espaço normado X . Prove que, se os espaços X e Y são completos, então X/Y é completo.

117. Sejam X um espaço vectorial complexo, $X_{\mathbb{R}}$ o mesmo espaço considerado como espaço vectorial real e $f \in X_{\mathbb{R}}^*$.

(a) Mostre que $(g : X \rightarrow \mathbb{C}) \in X^*$, com $g(x) = f(x) - if(ix)$.

(b) Prove que $f_1, f_2 \in X_{\mathbb{R}}^*$, com $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ e $f_2 = \operatorname{Im}(f)$.

(c) Verifique que $f(x) = f_1(x) - if_1(ix) = f_2(ix) + if_2(x)$.

(d) Conclua que os espaços vectoriais X^* e $X_{\mathbb{R}}^*$ são isomorfos.

118. Determine em $(\mathbb{R}^2)^*$ as bases duais das bases $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 1), (1, -1)\}$, respectivamente.

119. Considere o espaço vectorial complexo \mathbb{C}^n .

(a) Mostre que $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ define um produto interno em \mathbb{C}^n , com $x = (x_i)_{i=1}^n$ e $y = (y_i)_{i=1}^n$.

(b) Verifique que para $p \neq 2$, o espaço normado complexo (e real) l_2^n não é um espaço de Hilbert.

120. Consideremos $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ munido do produto interno do integral, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$. Sejam

ainda e_n e f_n funções tais que $e_n(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$, $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$.

Mostre que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sucessões ortonormadas.