

Teoria da Votação

1. Numa eleição, para eleger uma assembleia de representantes, é utilizado o método d'Hondt. A essa eleição concorreram três listas. A lista A obteve 61 votos, a lista B 65 votos e a lista C 14 votos.
 - (a) Determine a percentagem de votos obtidos por cada uma das listas.
 - (b) Se o número de mandatos a eleger nesta eleição fosse cinco, quais as listas que os obteriam?
 - (c) Calcule o número mínimo de mandatos necessário para que a lista C estivesse representado na assembleia.
 - (d) Resolva de novo as alíneas anteriores, considerando agora as seguintes votações:
 - i. A 100 votos, B 155 votos, C 45 votos;
 - ii. A 20 votos, B 15 votos, C 110 votos;
 - iii. A 5 votos, B 955 votos, C 40 votos;
 - iv. A 1250 votos, B 1300 votos, C 1500 votos, D 1150 votos.
 - (e) Usando o sistema do número uniforme, com $U = 14$, determine de novo o número de mandatos obtidos por cada uma das listas.
2. Numa eleição para a atribuição de dois mandatos concorreram cinco partidos, que obtiveram os seguintes resultados:
A 10 votos, B 11 votos, C 8 votos, D 8 votos, E 8 votos.
 - (a) Diga quais os partidos que elegem os dois mandatos.
 - (b) Se os partidos C e D concorressem coligados (obtendo 16 votos), qual seria o efeito que a coligação teria na distribuição de mandatos? E uma coligação entre C, D e E.
3. Nas eleições para o Parlamento Europeu realizadas em Portugal em 1994, os resultados dos principais partidos foram os indicados na tabela.

partido	votos	%	mandatos
PS	1060905	34,8	10
PSD	1046857	34,4	9
CDS-PP	378845	12,4	3
CDU	340803	11,2	3

(Nota: As percentagens apresentadas são em relação ao número total de votos.)

- (a) Se o número de mandatos a eleger fosse 24 em vez de 25, quem perderia um lugar? E se fosse 26?
 - (b) Se o PSD e o CDS-PP concorressem em coligação (obtendo a soma dos votos dos dois partidos), aumentariam o número de deputados eleitos? E uma coligação entre PS e a CDU.
 - (c) Sabendo que nas eleições legislativas da República Portuguesa existem 22 círculos eleitorais (18 distritos, 2 regiões autónomas e 2 círculos da emigração), qual é o número máximo de deputados que dois partidos podem ganhar a mais por concorrerem coligados. E uma coligação de três partidos?
4. (Teste de 2005/06) A tabela mostra os resultados das eleições para a Assembleia de Freguesia de Almedina-Coimbra realizadas em 9 Outubro de 2005.

	votos
PSD.CDS.PPM	346
PCP.PEV	217
PS	166
Total	729

- (a) A Assembleia de Freguesia tem nove membros. Determine a composição da assembleia.
- (b) Com mais quantos votos teria a coligação PSD.CDS.PPM obtido a maioria absoluta de mandatos?

5. Numa eleição com voto plural, um candidato que obtenha mais do que 50% dos votos ganha de certeza. Se for uma eleição em que sejam atribuídos 2 mandatos pelo método d'Hondt, então se um partido tiver mais do que $1/3$ dos votos tem a certeza de obter 1 mandato.

(a) Diga qual a proporção de votos suficiente para que um partido eleja 1 mandato numa eleição em que são eleitos n mandatos.

[Sugestão: Comece por analisar os casos $n = 1, 2, 3, \dots$]

(b) Diga qual a proporção de votos suficiente para que um partido eleja k mandatos numa eleição em que são eleitos n mandatos. ($k \leq n$)

6. Uma comissão é constituída por três membros: A, B e C. Um dos membros (A) tem direito a 2 votos e os outros dois a 1 voto cada um. Uma decisão é aprovada desde que obtenha 3 votos.

(a) Determine todas as coligações vencedoras e todos os votos decisivos.

(b) Calcule o índice de poder e o poder relativo de cada um dos membros da comissão.

7. Responda às alíneas do exercício anterior nos seguintes casos:

(a) os três elementos da comissão têm o mesmo número de votos e a decisão é tomada por maioria.

(b) a comissão tem quatro elementos, todos têm o mesmo número de votos, mas um deles tem direito de veto, ou seja tem que estar obrigatoriamente em todas as coligações vencedoras.

8. O Futebol Clube de Coimbra constituiu uma Sociedade Anónima Desportiva (SAD) para gerir o futebol do seu clube. O clube ficou com 20% das acções da SAD e as restantes foram adquiridas em partes iguais pela empresa de comunicação *Mediana Lisboa*, e pela empresa de distribuição *Oceano*. Sabendo que a lei determina que o clube fundador da SAD tem direito de veto na assembleia de accionistas, indique o poder relativo de cada um dos três sócios.

9. Uma empresa familiar tem cinco sócios, o pai, a mãe e três filhos. O capital da empresa está dividido entre os cinco em partes iguais e as decisões são tomadas por maioria.

Determine o poder relativo de cada um dos sócios nas seguintes situações:

(a) cada sócio decide de maneira independente;

(b) os dois cônjuges votam sempre em conjunto;

(c) um dos filhos é menor e é representado pelos pais.

10. (Frequência de 2004/05) Para eleger os elementos de uma comissão de seis elementos é utilizado o método proporcional d'Hondt. A essa eleição concorreram três listas e o resultados estão indicados na tabela.

lista	%	eleitos
A	40	3
B	39	2
C	21	1

(a) Sabendo que as decisões na comissão são tomadas por maioria (i.e. são necessários 4 votos), indique todas as coligações vencedoras, o índice de poder e o poder relativo de cada uma das listas.

(b) Se o número de elementos da comissão fosse oito, qual seria a representação na comissão de cada uma das listas.

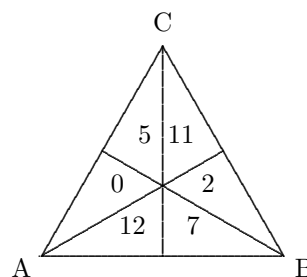
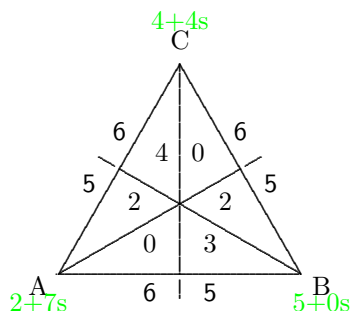
11. Considere os seguintes resultados de eleições democráticas, onde os eleitores ordenam completamente o conjunto dos candidatos.

ordenação	votos
$A \succ B \succ C \succ D$	12
$C \succ B \succ D \succ A$	7
$D \succ B \succ C \succ A$	13
$A \succ D \succ C \succ B$	5

ordenação	votos
$D \succ B \succ A \succ C$	250
$C \succ B \succ A \succ D$	73
$A \succ B \succ C \succ D$	29
$A \succ C \succ B \succ D$	105

ordenação	votos
$D \succ B \succ E \succ A \succ C$	10
$C \succ B \succ A \succ E \succ D$	10
$E \succ B \succ C \succ D \succ A$	10

- (a) Determine o vencedor da eleição se for usado o voto plural simples, maioritário a duas voltas, antiplural, Contagem de Borda, método de Condorcet e método “Runoff”.
- (b) Reverta a votação de cada eleitor (i.e., se votou $A \succ B \succ C \succ D$, então passa a votar $D \succ C \succ B \succ A$) e diga qual é o vencedor da votação plural, antiplural e Contagem de Borda. Compare com os resultados da alínea anterior.
12. Considere de novo as eleições do exercício 11.
- (a) Conte os votos da primeira eleição, usando o vector eleitoral $(7, 6, 1, 0)$.
- (b) Conte os votos da segunda eleição, usando o vector eleitoral $(2, 1, 0, 0)$.
- (c) Conte os votos da terceira eleição, usando o vector eleitoral $(10, 3, 2, 1, 0)$.
- (d) Em cada um dos casos, diga qual é o vector eleitoral normalizado.
13. A figura mostra a representação triangular de dois perfis eleitorais. A partir dessa representação indique o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural. No triângulo da direita complete a representação.



14. As tabelas mostram os resultados de eleições com três candidatos.

ordenação	votos	região
$A \succ B \succ C$	12	1
$A \succ C \succ B$	7	2
$C \succ A \succ B$	3	3
$C \succ B \succ A$	5	4
$B \succ C \succ A$	13	5
$B \succ A \succ C$	5	6

ordenação	votos	região
$A \succ B \succ C$	112	
$A \succ C \succ B$	517	
$C \succ A \succ B$	96	
$B \succ C \succ A$	986	
$B \succ A \succ C$	715	

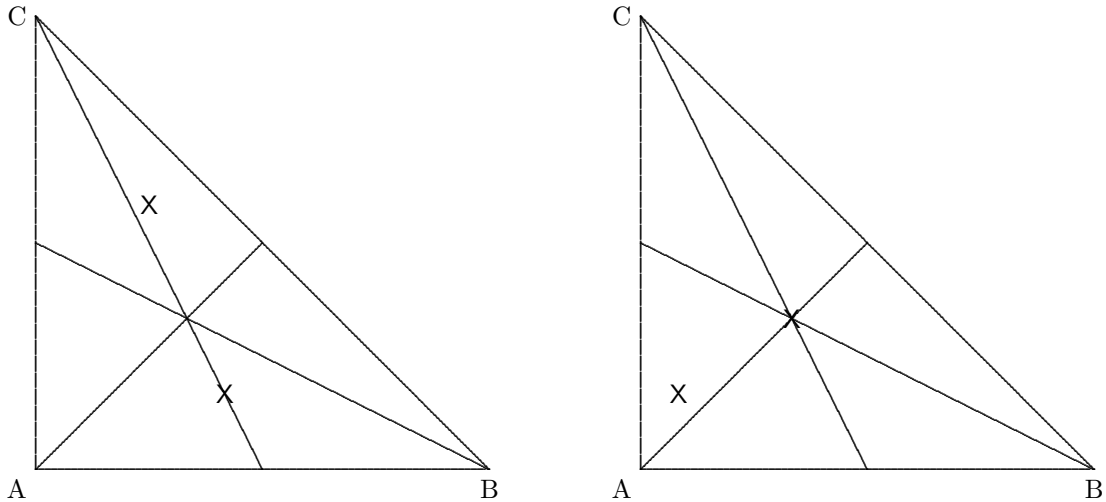
ordenação	votos	região
	37	1
	37	5
	38	3

- (a) Complete as duas últimas tabelas.
- (b) Faça a representação triangular de cada uma delas e indique o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural.
- (c) Apresente o resultado normalizado das votações plural e antiplural.

15. Considere de novo as votações consideradas nos exercícios 13 e 14. Para cada uma delas, calcule:

- (a) o resultado (p_s) da votação com com vector eleitoral $W_s = (1, s, 0)$, com $0 \leq s \leq 1$;
- (b) q_s , o resultado normalizado da mesma eleição.

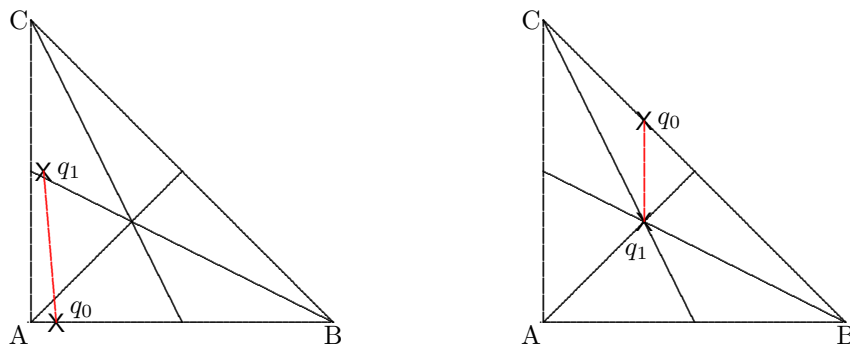
16. Indique o resultado das quatro votações que estão representadas nos triângulos.



17. Represente geometricamente as eleições, cujo o resultado final foi:

- (a) $p=(15,5,10)$;
- (b) $p=(12,50,13)$;
- (c) $p=(2,5,10)$;
- (d) $p=(1250,712,523)$.

18. Para duas eleições distintas, foi construído o segmento de recta que representa a variação dos resultados em função do vector eleitoral normalizado $(1, s, 0)$, $0 \leq s \leq 1$.



- (a) A partir das figuras, determine os resultados normalizados das eleições plural e antiplural.
- (b) Indique um perfil eleitoral que corresponda a esses resultados.

19. Considere as eleições com três candidatos cujo os resultados escritos na forma vectorial são $(4, 4, 2, 4, 5, 1)$ e $(1, 2, 0, 2, 5, 5)$, respectivamente.

- (a) Faça a representação triangular dos perfis eleitorais.
- (b) Determine os resultados das votações plural e antiplural.
- (c) Trace os segmento de recta que representa a variação dos resultados eleitorais, em função do vector posicional $W_s = (1, s, 0)$.
- (d) Determine analiticamente os valores de s para os quais se verifica cada um dos resultados possíveis.

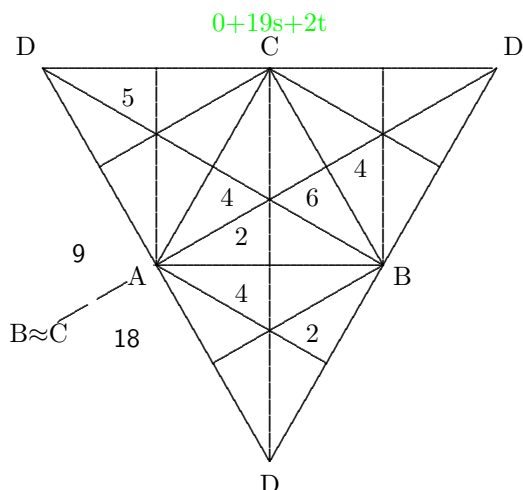
20. Numa eleição com três candidatos, o resultado em percentagem do voto plural foi (50, 30, 20), e do voto antiplural foi (25, 35, 40).
- Marque no triângulo eleitoral os resultados das duas votações.
 - Trace o segmento de recta que os une e interprete os resultados.
 - Determine os métodos posicionais para os quais o vencedor é o candidato que recebeu apenas 20% do voto plural.
 - Calcule o método posicional mais favorável ao candidato que recebeu 30% do voto plural.
21. (Frequência de 2004/05) A tabela mostra os resultados de uma eleição com três candidatos.

ordenação	votos	ordenação	votos
$A \succ B \succ C$	5	$B \succ C \succ A$	6
$A \succ C \succ B$	3	$C \succ A \succ B$	1
$B \succ A \succ C$	1	$C \succ B \succ A$	4

- Escreva a representação triangular deste perfil eleitoral. A partir dela, deduza o vencedor e o perdedor de Condorcet.
 - Determine os resultados normalizados da votação plural (q_0) e da votação antiplural (q_1). Represente o segmento dos resultados eleitorais em função do vector eleitoral $(1, s, 0)$, $0 \leq s \leq 1$.
 - Sem efectuar cálculos, diga se o candidato C pode ser o vencedor da eleição para algum método posicional. Justifique.
 - Determine todos os valores de s para os quais B é o vencedor da eleição com vector eleitoral $(1, s, 0)$, $0 \leq s \leq 1$.
22. Determine um perfil eleitoral (podem existir vários) tal que:
- $p_0 = (100, 0, 0)$ e $p_1 = (100, 70, 30)$;
 - $p_0 = (10, 5, 5)$ e $p_{1/2} = (13, 7, 10)$;
 - $p_{1/4} = (15, 15, 15)$ e $p_{1/2} = (15, 21, 18)$;
 - $q_0 = (1, 0, 0)$ e $q_1 = (0.5, 0.25, 0.25)$;
 - $q_{1/2} = (1/3, 1/3, 1/3)$ e $q_0 = (1/2, 0, 1/2)$;
 - $q_{1/3} = (1/3, 1/3, 1/3)$ e $q_0 = (4/9, 1/6, 7/18)$.
23. Seja A um candidato numa eleição com três candidatos. Mostre que se for usada a Contagem de Borda, A não pode ter mais do que $2/3$ dos votos, ou seja $q_{1/2}(A) \leq 2/3$. Represente no triângulo eleitoral a zona dos resultados admissíveis para a Contagem de Borda.
24. Diga porque é que não existe nenhum perfil eleitoral tal que:
- $q_s = (0, 0.2, 0.9)$;
 - $p_s = (10, 0, 2)$ e $q_s = (0.6, 0, 0.4)$;
 - $p_0 = (10, 3, 7)$ e $p_1 = (8, 12, 20)$;
 - $q_0 = (1, 0, 0)$ e $q_1 = (1/3, 1/3, 1/3)$;
 - $q_1 = (2/3, 1/6, 1/6)$;
 - $q_{1/2} = (0, 0.2, 0.8)$; (ver Ex. 23)
 - $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$ e $q_1 = (0.4, 0.2, 0.4)$;
 - $q_{1/2} = (2/3, 0, 1/3)$ e $q_0 = (0.99, 0, 0.01)$.
25. Suponha que numa eleição com três eleitores e três candidatos o resultado da votação plural é $(2, 0, 1)$. Será que é possível saber quem teria ganho se fosse usada a Contagem de Borda?
26. Considere uma eleição com três candidatos e os resultados da eleição escritos como vector ordenado $p = (p_1, \dots, p_6)$ induzido pela representação triangular.
- Para cada um dos seguintes perfis eleitorais p , determine o resultado da eleição, quando é usado um vector eleitoral $W_s = (1, s, 0)$.
 - $p = (71, 71, 0, 0, 0, 0)$;
 - $p = (8, 0, 0, 7, 3, 0)$;
 - $p = (0, 22, 0, 0, 22, 0)$;
 - $p = (8, 2, 10, 4, 2, 10)$.
 - Em cada um dos casos, determine o valor de s para o qual o resultado da eleição, p_s , é a média do resultado da votação plural, p_0 , e da votação antiplural, p_1 .

- (c) Calcule o resultado normalizado da eleição, q_s , e represente o segmento de recta da variação dos resultados eleitorais $[q_0, q_1]$.
- (d) Determine o ponto médio do segmento de recta dos resultado eleitorais.
27. (a) Determine o valor de s para o qual p_s é a média de p_0 e p_1 .
[Recorde que $p_s = (1 - s)p_0 + sp_1$.]
- (b) Determine o valor de s para o qual q_s é o ponto médio do segmento de recta de variação dos resultados eleitorais $[q_0, q_1]$.
[Recorde que $q_s = (1 - \frac{2s}{1+s})q_0 + (\frac{2s}{1+s})q_1$.]
- (c) Compare os resultados que obteve com os resultados do exercício anterior.
28. Considere as seis regiões em que está dividido o triângulo eleitoral. Repare que um segmento de recta nunca atravessa mais do que quatro regiões.
- Explique porque é que se num dado perfil eleitoral os três candidatos podem ser vencedores para algum método posicional, então um deles nunca pode ser último. Será isto verdade para quatro candidatos?
29. Mostre que se um perfil eleitoral for da forma $p = (n, k, n, k, n, k)$, com n e k dois inteiros positivos, então o resultado da eleição é um empate completo ($q_s = (1/3, 1/3, 1/3)$), qualquer que seja o método posicional escolhido para contar os votos. Qual é o aspecto do segmento de recta dos resultados eleitorais?
30. Numa eleição com três candidatos, e considerando o perfil eleitoral $p = (p_1, \dots, p_6)$, o candidato A é o vencedor de Condorcet se $p_1 + p_2 + p_3 > p_4 + p_5 + p_6$ e $p_1 + p_2 + p_6 > p_4 + p_5 + p_3$.
- Mostre que A não pode ser último se for usada a Contagem de Borda.
- [Sugestão: Suponha que A é último e encontre uma contradição.]
31. Considere um colégio eleitoral composto por 13 membros. Numa escolha entre três hipóteses, as preferências dos membros do colégio ficaram assim definidas, $A \succ B \succ C$: 4 votos, $A \succ C \succ B$: 3 votos, $C \succ B \succ A$: 6 votos.
- (a) Verifique que usando os vectores posicionais $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(2, 1, 0)$, cada uma das hipóteses pode ser a escolhida.
- (b) Suponha que existe uma quarta hipótese D que é a terceira preferida de todos os eleitores. Observando a alínea anterior, verifique que existe um método posicional em que cada uma das quatro hipóteses pode ser a escolhida.
- (c) Construa um exemplo com cinco hipóteses, onde cada hipótese é a escolhida para um determinado método posicional. Será que podia usar o mesmo tipo de construção para construir um exemplo com dez hipóteses?
32. Use um dos exemplos do exercício 11 para comprovar que o voto plural simples, a Contagem de Borda e o voto maioritário a duas voltas não verificam o critério da *Independência das alternativas irrelevantes* (Teorema de Arrow).
33. Construa um exemplo que mostre que a votação antiplural não satisfaz o critério de *Pareto*.
34. (a) Construa um exemplo que mostre, ao mesmo tempo, que a voto maioritário a duas voltas e o método Runoff não satisfazem o critério da *Monotonia*.
- (b) Construa agora um exemplo, onde apenas um deles não satisfaça o critério da *Monotonia*.

35. A figura representa o perfil eleitoral duma eleição com quatro candidatos.



- Complete a representação.
- A partir da representação geométrica, diga qual é o vencedor de Condorcet (se existir) e os vencedores das votações plural e antiplural.
- Faça a representação triangular da votação verificada após a desistência de D.
- Calcule de novo os resultados da eleição plural e antiplural. Qual das duas regista um resultado paradoxal?

36. Um certo prémio literário é atribuído por um júri composto por dez elementos. No ano de 2004 chegaram à fase final cinco candidatos, a Ana, a Carla, o João, o Rui e o Tiago. O presidente do júri, além de uma ética duvidosa, tinha uma preferência pelo Rui e estava interessado em que ele fosse o vencedor.

preferências	votos
Ana \succ Carla \succ João \succ Rui \succ Tiago	6
Rui \succ Carla \succ João \succ Tiago \succ Ana	2
Tiago \succ Rui \succ João \succ Carla \succ Ana	2

- Suponhamos que o presidente do júri lhe pedia para indicar um método de contagem dos votos em que o Rui fosse o vencedor. Seria isso possível? Justifique.
 - Como ele achou difícil convencer os outros membros do júri desse método, pediu que lhe indicasse um método mais prático onde o vencedor fosse o João. Qual seria?
 - Se o pedido de ajuda fosse sincero, qual o método de contagem que aconselharia? Porquê?
37. Numa votação, para escolher entre três candidatos, registaram-se as seguintes preferências individuais.

preferências	votos
X \succ Z \succ Y	10
Z \succ Y \succ X	2
Y \succ X \succ Z	15

- Determine o resultado da votação utilizando a Contagem de Borda.
 - Se alguns eleitores que preferem Y mudassem estrategicamente o seu voto para Y \succ Z \succ X, Y poderia ser o vencedor. Qual o número mínimo de eleitores que teriam que usar essa estratégia para que Y ganhasse a eleição?
 - Seria possível que como consequência dessa estratégia X ficasse em último?
 - Teriam os “apoiantes” de X uma contra-estratégia?
38. (Frequência de 2004/05) Diga se as afirmações que se seguem são verdadeiras ou falsas, referindo o resultado em que se baseia ou indicando um exemplo que suporte a sua resposta.
- A votação plural verifica o critério da *Independência das alternativas irrelevantes*.
 - Existe um perfil eleitoral tal que o resultado da votação plural é $p_0 = (50, 30, 20)$ e da votação antiplural é $p_1 = (100, 80, 20)$.
 - A utilização da contagem de Borda numa votação tem vantagens em relação à utilização do voto plural.