Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

**Álgebra Linear e Geometria Analítica I**

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 10

150. Prove que, se uma matriz quadrada $A$ satisfizer $A^2 = A$, então $N(A) \cap C(A) = \{0\}$.

151. (a) Sendo $u$ $m \times 1$ e $v$ $n \times 1$, prove que a matriz $uv^T$ tem característica igual a 0 ou a 1.

 (b) Reciprocamente, prove que, se uma matriz $A$ $m \times n$ tiver característica 1, então existem vectores $u$ $m \times 1$ e $v$ $n \times 1$ tais que $A = uv^T$.

 (c) Escreva na forma $uv^T$ as seguintes matrizes de característica 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

152. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere ainda os vectores $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3$ e $v_3 = -u_2$.

 (a) Verifique que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

 (b) Determine a matriz de mudança $S$ da base $\{u_1, u_2, u_3\}$ para a base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

 (c) Calcule as coordenadas do vector $x = v_1 + v_2 - v_3$ na base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

 (d) Designando por $X$ e $Y$, respectivamente, os vectores das coordenadas de $x$ nas bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$, verifique que $X = SY$.

153. Determine a matriz de mudança da base $\{(5,2),(7,3)\}$ para a base $\{(3,2),(1,1)\}$. Se as componentes de um vector $v$ em relação à segunda base forem 1 e 4, quais são as suas componentes em relação à primeira base?

154. Sendo $F$ e $G$ subespaços de $\mathbb{R}^n$, define-se a sua soma como sendo o conjunto $F + G = \{v + w : v \in F,\ w \in G\}$. Prove que:

 (a) $F + G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

 (b) $F + G$ contém $F$ e $G$ (ou seja, contém $F \cup G$).

 (c) $F + G$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém $F \cup G$, isto é, para todo o subespaço $H$ que contém $F \cup G$ tem-se $F + G \subseteq H$.

155. Sejam $F$ e $G$ subespaços de $\mathbb{R}^n$ e considere-se o subespaço $H = F + G$. Diz-se que $H$ é a <u>soma directa</u> de $F$ com $G$ e escreve-se $H = F \bigoplus G$ se $F \bigcap G = \{0\}$.
Mostre que:

 (a) $H = F \bigoplus G$ se e só se todo o vector $x$ de $H$ se escreve de <u>modo único</u> como soma de um vector de $F$ com um vector de $G$.

(b) $H = F \bigoplus G$ se e só se o vector nulo de $\mathbb{R}^n$ se escreve de <u>modo único</u> como soma de um vector de $F$ com um vector de $G$.

156. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}, \quad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}.$$

(a) Prove que $F$ e $G$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$. Descreva-os geometricamente.

(b) Mostre que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Será $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

157. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
$$T = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_2 = y_3 = y_4 = 0\}.$$

(a) Prove que $S$ e $T$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$ e que, além disso, $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

(b) Adapte os dados para $\mathbb{R}^3$ e construa geometricamente as respostas.

158. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Determine um subespaço complementar de $F$, isto é, um subespaço $G$ tal que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. Esse complementar de $F$ será único?

159. Sejam $F$ e $G$ subespaços de dimensão finita de $\mathbb{R}^n$.

(a) Prove que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

(b) Conclua da alínea (a) que, se $F \cap G = \{0\}$, então $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$. Como se pode obter uma base para $F \oplus G$ a partir de bases de $F$ e $G$ ?

(c) Prove que $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.

160. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}, \; G = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}.$$

(a) Prove que $F$ e $G$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$ e determine a sua dimensão.

(b) Prove que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

(c) Represente $F$ e $G$ geometricamente no caso $n = 2$ (e tente visualizá-los para $n = 3$).

161. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e seja $k$ um inteiro tal que $1 \leq k \leq n$. Considere os subespaços $F = \mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $G = \mathfrak{L}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Prove que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

162. Determine um subespaço complementar do subespaço de $\mathbb{R}^4$, $F = \mathfrak{L}\{(1, 2, 3, 0), (2, -1, 2, 1)\}$.

163. Se $F$ for um plano passando pela origem em $\mathbb{R}^3$, quais são os possíveis subespaços complementares de $F$ em $\mathbb{R}^3$? E se $F$ for uma recta passando pela origem?