Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 10

128. Calcule uma base de cada um dos subespaços indicados.

    (a) $\mathscr{L}\{(1,1,1,0),(1,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,1,2,3)\}$;

    (b) $\{(\alpha+\beta+2\gamma,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$;

    (c) $\{(x,x,x,y)\in\mathbb{R}^4 : x,y\in\mathbb{R}\}$;

    (d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0 \text{ e } x_3=x_4+x_1\}$;

    (e) $\{(0,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2+x_3-x_4=0\}$;

    (f) $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1+\cdots+x_n=0\}$.

129. Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$. Prove que para qualquer vector $v\in\mathbb{R}^n$ se verifica a seguinte equivalência
$$v\notin\mathscr{L}(S)\Leftrightarrow \dim\mathscr{L}(S\cup\{v\})=1+\dim\mathscr{L}(S).$$

130. Demonstre que, se $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ for um conjunto linearmente independente de vectores de $\mathbb{R}^n$, é possível acrescentar vectores a S de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^n$.

131. Verifique que os vectores dados são linearmente independentes e estenda-os a uma base do subespaço indicado.

    (a) $(3,2,1),(2,-1,-1)\in\mathbb{R}^3$;

    (b) $(1,0,1,-1),(0,2,3,2)\in\mathbb{R}^4$;

    (c) $(1,1,0,0,0),(0,1,1,0,0),(0,0,1,1,0)\in\mathbb{R}^5$;

    (d) $(0,2,0)\in\mathscr{L}\{(0,2,0),(0,3,0),(1,0,0),(1,-5,0)\}$;

    (e) $(1,-1,0)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0\}$.

132. Prove que qualquer conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^n$ com n vectores é uma base e qualquer conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$ com n vectores é uma base. (Por outras palavras, se o número de vectores for igual à dimensão, cada uma das propriedades que entram na definição de base implica a outra.)

133. Considere os vectores $v_1=(2,-3,1)$, $v_2=(0,1,2)$ e $v_3=(1,1,-2)$ de $\mathbb{R}^3$. Mostre que os vectores v_1,v_2 e v_3 constituem uma base de $\mathbb{R}^3$ e determine as coordenadas do vector $(3,2,1)$ relativamente à base $\{v_1,v_2,v_3\}$.

134. Mostre que os vectores (a,b) e (c,d) constituem uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad-bc\neq 0$.

135. Seja $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e u um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$. Prove que existe $k\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $\{v_1,\ldots,v_{k-1},u,v_{k+1},\ldots,v_n\}$ é base de V.

    [**Sugestão**: Escreva $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ (porque o pode fazer?) e escolha k tal que $\alpha_k\neq 0$ (porque é que existe pelo menos um tal k?)]

136. Determine a dimensão e indique duas bases diferentes para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,3), (4,5,6)$ e $(7,8,9)$.

137. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Prove que:

   (a) $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^n$.

   (b) $\dim F = \dim \mathbb{R}^n$ se e só se $F = \mathbb{R}^n$.

138. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais não todos nulos, determine a dimensão e indique uma base do subespaço de $\mathbb{R}^n$ definido pela equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

139. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 \text{ e } x_4 = 2x_2\}, \quad G = \mathscr{L}\{(1,0,1,0), (0,2,0,1), (-1,2,-1,1)\}.$$

Determine a dimensão e indique uma base para F, G e $F \cap G$.

140. Prove que, se F e G forem subespaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^5$, então têm de certeza pelo menos um vector não nulo em comum. (Sugestão: Se reunir uma base de F com uma de G, fica com seis vectores).

141. Determine a característica e o espaço nulo das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

142. Determine bases do espaço das linhas e do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes:
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

143. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real. Determine para que valores de α a característica de A é, respectivamente, 1, 2 e 3. Em cada caso, determine bases para o espaço das colunas, das linhas e para o espaço nulo de A.

144. O mesmo que no exercício anterior para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

145. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Diga para que valores de α o espaço das colunas de A coincide com $\mathbb{R}^3$.

146. Considere os vectores $(1, \alpha, 1), (1, \alpha - 1, 1), (1, \alpha + 1, 1)$ e $(\alpha, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o subespaço gerado por estes quatro vectores tem dimensão 2.