Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 — Folha 11

164. Mostre que:
   (a) $\langle 0, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = 0$.
   (c) Se $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = u'$.

165. Demonstre por indução que em $\mathbb{R}^n$ vale a seguinte propriedade:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y\rangle.$$

166. Se os vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ forem ortogonais, mostre que, quaisquer que sejam os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, os vectores $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_k v_k$ são também ortogonais.

167. Prove que, se um vector w for ortogonal a cada um dos vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ também é ortogonal a qualquer combinação linear deles.

168. No espaço $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (-3, 0, 1)$.
   (a) Verifique que u e v são ortogonais.
   (b) Calcule as normas de u e de v.
   (c) Escreva os vectores $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$ e verifique que têm norma 1. Generalize esta observação.

169. Que mudança se dá no ângulo entre os vectores não nulos x e y se:
   (a) se multiplicar x por um número positivo?
   (b) se multiplicar x por um número negativo?
   (c) se multiplicar x e y por números negativos?

170. Mostre que o triângulo em $\mathbb{R}^3$ cujos vértices são $u = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $v = (1, -\sqrt{2}, 1)$ e $w = (-1, \sqrt{2}, -1)$ é rectângulo e isósceles.

171. Calcule o ângulo que o vector $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ faz com os vectores da base canónica.

172. Prove que a norma da projecção ortogonal de y sobre x é $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|}$.

173. Prove que uma base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ é ortonormada se e só se $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$.

174. Seja $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vector qualquer.
   (a) Mostre que as coordenadas de x na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são $\langle x, u_1\rangle, \langle x, u_2\rangle, ..., \langle x, u_n\rangle$. (Sugestão: escreva $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$ e calcule $\langle x, u_j\rangle$.)

(b) Use a alínea (a) para concluir que, se x tiver norma 1, então as suas coordenadas na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são os cosenos dos ângulos $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ de x com os vectores da base. Conclua que $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \theta_i = 1$.

(**Nota:** Aos valores $\cos\theta_1, \cos\theta_2, ..., \cos\theta_n$ chamamos <u>cosenos directores</u> do vector x.)

175. A desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser aplicada em várias situações. Use-a, por exemplo, para demonstrar o seguinte facto: Sendo α, β e μ números reais arbitrários, tem-se $\alpha\beta+\beta\mu+\mu\alpha \leq \alpha^2+\beta^2+\mu^2$. Supondo que $\alpha\beta\mu \neq 0$, conseguirá dizer exactamente em que casos é que nesta desigualdade ocorre igualdade?

176. Deduza da "desigualdade triangular" que, sendo x, y e z quaisquer em $\mathbb{R}^n$, se tem $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$. O que é que isto significa geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?

177. Averigúe em que casos ocorre igualdade na desigualdade triangular.

178. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que:

    (a) Se $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então x e y são ortogonais.

    (b) Se $\|x\| = \|y\|$, então os vectores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais.

    (c) Se x e y forem ortogonais então $\|x+y\| = \|x-y\|$.

    Interprete geometricamente, para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, as alíneas (b) e (c).

179. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Prove que x e y são ortogonais se e só se $\|x\| \leq \|x+\alpha y\|$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

180. Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sendo θ o ângulo entre eles, mostre que $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\|\cos\theta$. Note que este enunciado generaliza o Teorema de Pitágoras.

181. Em $\mathbb{R}^n$ a norma define-se a partir do produto interno. Curiosamente, também é possível obter o produto interno usando só a norma, através da igualdade $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Demonstre esta igualdade.

182. (a) Mostre que, se Q $n \times n$ for ortogonal, então $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ para quaisquer vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

    (b) Conclua que uma matriz $n \times n$ ortogonal não altera os ângulos entre vectores de $\mathbb{R}^n$.

183. (a) Mostre que, se Q $n \times n$ for ortogonal, então $\|Qx\| = \|x\|$ para todo o vector $x \in \mathbb{R}^n$.

    (b) Mostre que, reciprocamente, se $\|Qx\| = \|x\|$ para todo o vector $x \in \mathbb{R}^n$, então Q é ortogonal. (Sugestão: Basta mostrar que $\langle Q^TQu, v\rangle = \langle u, v\rangle$ para quaisquer u e v (justifique). Use--se o exercício anterior, notando que $\langle Q^TQu, v\rangle = \langle Qu, Qv\rangle$.)

    Nota: Observe-se que deste exercício concluímos que uma matriz real $n \times n$ é ortogonal <u>se e só se</u> não altera a norma dos vectores de $\mathbb{R}^n$.