**Álgebra Linear e Geometria Analítica I**

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 11

147. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vector $(1, 0, 1)$.

148. Existirá uma matriz cujo espaço das linhas contenha o vector $(1, 1, 1)$ e cujo espaço nulo contenha o vector $(1, 0, 0)$?

149. Se $A$ for uma matriz $64 \times 17$ com característica 11, quantos vectores linearmente independentes satisfazem $Ax = 0$? E quantos vectores linearmente independentes satisfazem $A^T y = 0$?

150. Seja $A$ uma matriz real do tipo $m \times n$ e $B$ uma matriz real do tipo $p \times m$. Mostre que

    (a) $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A^T)$;
    (b) $\mathrm{car}(BA) \leq \mathrm{car}(B)$;
    (c) $\mathrm{nul}(A) \leq \mathrm{nul}(BA)$;
    (d) $\mathrm{car}(BA) \leq \mathrm{car}(A)$;
    (e) $\mathrm{nul}(A^T A) = \mathrm{nul}(A)$;
    (f) $\mathrm{car}(A^T A) = \mathrm{car}(AA^T) = \mathrm{car}(A)$.

151. Seja $A$ uma matriz do tipo $m \times n$ qualquer. Sejam B do tipo $m \times m$ e C do tipo $n \times n$ invertíveis. Prove que:

    (a) $\mathrm{car}(BA) = \mathrm{car}(A)$; (b) $\mathrm{car}(AC) = \mathrm{car}(A)$; (c) $\mathrm{car}(BAC) = \mathrm{car}(A)$.

152. Sendo $A$ uma matriz do tipo $n \times n$, diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação geral: "Se as colunas de $A$ forem linearmente independentes, o mesmo acontece às colunas de $A^2$".

153. Seja $A$ uma matriz do tipo $n \times n$. Prove que, se $A^2 = A$ e $\mathrm{car}(A) = n$, então $A = I$.

154. Prove que, se uma matriz quadrada $A$ satisfizer $A^2 = A$, então $N(A) \cap C(A) = \{0\}$.

155. Sendo $F$ e $G$ subespaços de $\mathbb{R}^n$, define-se a sua soma como sendo o conjunto

$$F + G = \{v + w : v \in F,\ w \in G\}.$$

    Prove que:

    (a) $F + G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
    (b) $F + G$ contém $F$ e $G$ (ou seja, contém $F \cup G$).
    (c) $F + G$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém $F \cup G$, isto é, para todo o subespaço $H$ que contém $F \cup G$ tem-se $F + G \subseteq H$.

156. Sejam $F$ e $G$ subespaços de $\mathbb{R}^n$ e considere-se o subespaço $H = F + G$. Diz-se que $H$ é a soma directa de $F$ com $G$ e escreve-se $H = F \bigoplus G$ se $F \cap G = \{0\}$.

    Mostre que:

    (a) $H = F \bigoplus G$ se e só se todo o vector $x$ de $H$ se escreve de modo único como soma de um vector de $F$ com um vector de $G$.
    (b) $H = F \bigoplus G$ se e só se o vector nulo de $\mathbb{R}^n$ se escreve de modo único como soma de um vector de $F$ com um vector de $G$.

157. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}, \quad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}.$$

(a) Prove que $F$ e $G$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$. Descreva-os geometricamente.

(b) Mostre que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Será $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

158. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
$$T = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_2 = y_3 = y_4 = 0\}.$$

Prove que $S$ e $T$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$ e que, além disso, $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

159. Sejam $F$ e $G$ subespaços de dimensão finita de $\mathbb{R}^n$. Prove que $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.

160. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e seja $k$ um inteiro tal que $1 \leq k \leq n$. Considere os subespaços $F = \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $G = \mathscr{L}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Prove que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

161. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$
$$G = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}.$$

(a) Prove que $F$ e $G$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$ e determine a sua dimensão.

(b) Prove que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

162. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Determine um subespaço complementar de $F$, isto é, um subespaço $G$ tal que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. Esse complementar de $F$ será único?

163. Determine um subespaço complementar do subespaço de $\mathbb{R}^4$, $F = \mathscr{L}\{(1, 2, 3, 0), (2, -1, 2, 1)\}$.

164. Se $F$ for um plano passando pela origem em $\mathbb{R}^3$, quais são os possíveis subespaços complementares de $F$ em $\mathbb{R}^3$? E se $F$ for uma recta passando pela origem?

165. Mostre que:

(a) $\langle 0, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = 0$.

(c) Se $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = u'$.

166. Demonstre por indução que em $\mathbb{R}^n$ vale a seguinte propriedade:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y\rangle.$$

167. Se os vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ forem ortogonais, mostre que, quaisquer que sejam os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, os vectores $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ...., \alpha_k v_k$ são também ortogonais.

168. Prove que, se um vector $w$ for ortogonal a cada um dos vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ também é ortogonal a qualquer combinação linear deles.