DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 14

209. Calcule o volume do paralelipípedo definido por $(-3, 2, 1)$, $(1, 0, -1)$ e $(3, 3, -1)$.

210. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^3$, e designando por A a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\sqrt{\det(A^T A)}$.

211. Calcule a área do paralelogramo definido por $(-3, 2, 1)$ e $(1, 0, -1)$.

212. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), e designando por θ o ângulo entre eles, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\|v_1\|\,\|v_2\|\operatorname{sen}\theta$.

213. Sendo $u = (2, -1, 3), v = (0, 1, 7)$ e $w = (1, 4, 5)$, calcular:

$v \wedge w$; $u \wedge (v \wedge w)$; $(u \wedge v) \wedge w$; $(u \wedge v) \wedge (v \wedge w)$;
$u \wedge (v - 2w)$; $(u \wedge v) - 2w$

214. Em cada uma das alíneas ache um vector ortogonal aos dois vectores:

(a) $u = (-7, 3, 1)$, $v = (2, 0, 4)$ (b) $u = (-1, -1, -1)$, $v = (2, 0, 2)$

215. Dados u, v, w em $\mathbb{R}^3$, mostre que o volume do paralelipípedo definido por u, v e w é igual a $|\langle u, v \wedge w\rangle|$.

216. Sendo $u, v \in \mathbb{R}^3$, mostre que o determinante da matriz cujas colunas são u, v e $u \wedge v$ é ≥ 0.

217. Diga se os vectores $a = (1, 6, 4, 4, -2)$ e $b = (1, 6, 5, 4, -2)$ pertencem ao plano em $\mathbb{R}^5$ de equação $x = p + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, onde $p = (2, 3, -1, 1, 1)$, $v_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$.

218. Para cada uma das seguintes rectas em $\mathbb{R}^4$, determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1, 0, 0, 1)$ e é paralelo aos vectores $(5, 2, -3, 1)$, $(4, 1, -1, 0)$ e $(-1, 2, -5, 3)$

(a) $x = (3, 1, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ (b) $x = (3, 0, -4, 1) + \alpha(-1, 1, 2, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
(c) $x = (-2, 0, -1, 2) + \alpha(1, 1, -2, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

219. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 1, 0)$, $(6, 0, -1)$ e $(3, 0, 0)$.

220. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(3, 1, -1)$ e tem a direcção de $(1, -1, 2)$.

221. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 2, 2)$ e é paralelo às rectas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

222. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(2, 1, -3)$ e por $(4, 0, -2)$.

223. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, -1)$ e é paralelo a $(2, 1, 0)$.

224. Diga se existe um plano em $\mathbb{R}^3$ que contenha $(2, 1, 3), (0, 3, 9), (3, 3, 4)$ e $(7, 5, 0)$.

225. Mostre que a intersecção dos planos em $\mathbb{R}^3$ dados por

$$\{(8,0,0)\} + \mathscr{L}\{(-4,1,0),(2,0,1)\} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{(1,0,-2),(0,1,1)\}$$

é uma recta e determine equações paramétricas dessa recta.

226. Determine equações paramétricas do plano em $\mathbb{R}^3$ que contém $(1,0,0)$ e também contém a recta de equação $x = (0,1,0) + \alpha(0,1,-2), \alpha \in \mathbb{R}$.

227. Escreva uma equação geral (ou cartesiana) de cada um dos seguintes planos em $\mathbb{R}^3$:

(a) O plano que contém o ponto $(1,2,3)$ e é perpendicular ao vector $(-1,1,0)$.

(b) O plano que contém os pontos $(2,1,3)$, $(-3,-1,3)$ e $(4,2,3)$.

(c) O plano que contém o ponto $(6,0,-2)$ e é paralelo aos vectores $(1,0,0)$ e $(0,-2,1)$.

(d) O plano que contém o ponto $(4,-1,2)$ e é paralelo ao plano $2x - 3y - z = 5$.

228. Dado o plano em $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $3x - 2y - z = 6$, determine equações paramétricas desse plano.

229. (a) Considere o plano em $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $ax + by + cz = d$. Qual é o significado geométrico da condição $c = 0$?

(b) Sejam dados m pontos no espaço $\mathbb{R}^3$. Como procederia para determinar o plano (não paralelo ao eixo dos zz) que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses m pontos?

230. Considere os seguintes elementos do espaço $\mathbb{R}^3$: $p = (1,0,0)$, $q = (0,1,0)$ e $v = (0,1,-2)$. Determine:

(a) Uma equação cartesiana do plano que contém o ponto p e é ortogonal a v.

(b) Equações paramétricas do plano que contém p e a recta de equação $x = q + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

231. Calcule a distância do ponto $b = (2,1,0)$ ao plano em $\mathbb{R}^3$ de equação $x + y - z = 0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b?

232. Considere o hiperplano em $\mathbb{R}^4$ $x = \{p\} + F$, onde $p = (0,0,-3,6)$ e F é gerado pelos vectores $(1,0,2,-2)$, $(0,1,-2,0)$ e $(2,1,6,-4)$.

(a) Determine uma equação cartesiana deste hiperplano.

(b) Calcule a distância de $x_0 = (5,3,-1,-1)$ a esse hiperplano.

233. O ângulo entre dois planos $\langle u, x-p\rangle = 0$ e $\langle v, x-q\rangle = 0$ é o ângulo entre u e v (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.)
Calcule o ângulo entre os planos em $\mathbb{R}^3$ de equações $x + y + 4z = 1$ e $x - 2y - 2z = 3$.

234. Determine equações cartesianas da recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(2,-1,4)$ e é perpendicular ao plano $x - 3y + 2z = 1$.

235. Determine equações paramétricas da recta em $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.