Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 2

16. Prove que multiplicar uma matriz A $m \times n$ à esquerda por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ equivale a multiplicar a 1ª linha por α_1, a 2ª linha por α_2, etc. Prove a seguir que multiplicar A à direita por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ equivale a multiplicar a 1ª coluna por α_1, a 2ª coluna por α_2, etc.

17. Calcule $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

18. Prove que uma matriz quadrada que comute com uma matriz diagonal de elementos diagonais todos distintos tem de ser ela própria uma matriz diagonal. Adicionalmente mostre que uma matriz quadrada que comute com todas as matrizes quadradas da mesma ordem tem que ser uma matriz escalar (isto é, da forma αI para algum número α).

19. [**Produto por blocos**] Sejam A do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times p$ duas matrizes. Considerem-se as seguintes partições em blocos (ou submatrizes) de cada uma destas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}$$

onde, para todos os possíveis valores de i, j e k, o número de colunas de A_{ik} seja igual ao número de linhas de B_{kj}, por outras palavras, seja possível multiplicar A_{ik} por B_{kj}. Mostre que o produto AB se pode calcular do seguinte modo (note que o número de colunas de blocos de A é igual ao número de linhas de blocos de B):

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{s} A_{1k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{1k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{1k}B_{kt} \\ \sum_{k=1}^{s} A_{2k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{2k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{2k}B_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} A_{rk}B_{k1} & \sum_{k=1}^{s} A_{rk}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} A_{rk}B_{kt} \end{bmatrix}.$$

20. Calcule os seguintes produtos matriciais usando a multiplicação por blocos (fazendo a partição indicada):

(a) $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ \hline -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right]^2$.

21. Utilizando a multiplicação por blocos determine AB sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

22. Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:
(a) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

23. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Prove que

(a) se A é invertível, então a sua inversa é única;

(b) se A e B são ambas invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(c) se A é invertível e a sua inversa é A^{-1}, então A^k $(k \in \mathbb{N})$ é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

(d) se A é invertível e C é uma matriz $n \times p$ tal que $AC = 0$, então $C = 0$;

(e) se A é invertível e D é uma matriz $m \times n$ tal que $DA = 0$ então $D = 0$;

(f) se A é invertível e $AC = AD$ (C e D matrizes $n \times p$), então $C = D$;

(g) se A é invertível e $EA = FA$ (E e F matrizes $m \times n$), então $E = F$;

(h) se A é invertível e α é um número não nulo, então a matriz αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

24. Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. Usando o conhecimento da matriz inversa de A e a igualdade

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

calcule A^3.

25. Dê exemplos não triviais (isto é, $\neq I$ e $\neq -I$) de matrizes 2×2 que sejam inversas de si próprias.

26. Mostre que as seguintes matrizes quadradas $n \times n$, com $n \geq 2$, não são invertíveis.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.