

36. Escreva todas as matrizes de permutação 3×3 , incluindo $P = I$, e para cada uma identifique a sua inversa (que também é uma matriz de permutação).
37. Mostre que toda a matriz de permutação é ortogonal.
38. Seja A uma matriz $n \times n$ e designemos por v_1, v_2, \dots, v_n as suas colunas. Prove que A é ortogonal se e só se, para $i, j = 1, 2, \dots, n$, se tem $v_i^T v_j = \delta_{ij}$.
39. Uma matriz quadrada A diz-se involutória ou uma involução se $A^2 = I$. Mostre que cada uma das seguintes propriedades de uma matriz quadrada é consequência das outras duas: simétrica, ortogonal, involutória.
40. Efectue os seguintes produtos de matrizes

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

41. Usando o exercício anterior indique um sistema de equações lineares
- (a) com três equações e três incógnitas que tenha $[-2 \ 1 \ -1]^T$ como solução;
- (b) com duas equações e três incógnitas que tenha $[1 \ -1 \ 0]^T$ como solução;
- (c) com três equações e três incógnitas que tenha $[1 \ 1 \ 1]^T$ como solução;
- (d) com três equações e duas incógnitas que tenha $[1 \ 2]^T$ como solução.
42. Resolva pelo método de eliminação de Gauss o sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

e desenhe no plano xy as duas rectas cujas equações são as indicadas. Desenhe também as rectas que aparecem no final da eliminação.

43. Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação. Registe os pivots utilizados e as operações que efectuou com as equações.

$$(a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases} \quad (j) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$$

44. Considere o sistema de equações onde β é um parâmetro real:

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases}$$

(a) Discuta o sistema em função de β .

(b) Considere o sistema homogêneo associado a $\beta = 0$ e determine a solução (ou soluções) do sistema.

45. Considere o sistema de equações nos parâmetros reais a , b e c :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ bx_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Determine a relação entre a , b e c de forma que o sistema só tenha uma incógnita livre.

46. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + ax_2 = 9 \\ 4x_1 + bx_2 = -7 \end{cases}$$

Determine a e b de forma que o sistema seja possível e determine a solução nesse caso.