Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 5

59. Mediante a resolução de sistemas triangulares resolva os sistemas $Ax = b_1$ e $Ax = b_2$ onde,

    (a) A é a matriz da alínea (c) do exercício anterior e com
    $b_1 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

    (b) A é a matriz da alínea (e) do exercício anterior e com
    $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$;

    (c) A é a matriz da alínea (f) do exercício anterior e com
    $b_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 - 4 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$.

60. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine a decomposição LU de A.

    (b) Determine a matriz inversa de L e a matriz inversa de U.

    (Sugestão: Escreva as matrizes L e U como produto de matrizes elementares.)

    (c) Usando os resultados obtidos na alínea anterior calcule A^{-1}.

61. Sendo A quadrada não singular, mostre que a matriz D nas decomposições LDU de A e A^T é a mesma. (Por outras palavras, A e A^T têm os mesmos pivots.)

62. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ determine uma matriz de permutação P para a qual exista a decomposição LU de PA e determine os factores dessa decomposição.

63. Determine as decomposições $PA = LDU$ sendo:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $a, c, d \neq 0$.

64. Dê exemplo de uma matriz não singular 4×4 que exija três trocas de linhas para levar a eliminação até ao fim.

65. Para cada uma das matrizes $A = \begin{bmatrix} \gamma & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 8 & 3 \\ 0 & \beta & 3 \end{bmatrix}$, diga que valores dos parâmetros tornam necessárias trocas de linhas no processo de factorização, e que valores dos parâmetros tornam a matriz singular.

66. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, onde $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Resolva os seguintes sistemas:

(a) $Ax = b$; (b) $PAx = b$; (c) $Ax = Pb$;

(d) $LPUx = b$, onde L e U são as matrizes da factorização da matriz A acima.

67. Para cada uma das seguintes matrizes A,

(i) determine uma factorização LU, onde L é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada (se tal não for possível, faça-o para PA, onde P é uma matriz de permutação adequada);

(ii) registe os pivots usados na eliminação e indique a característica de A;

(iii) determine, relativamente ao sistema $Ax = 0$, as incógnitas básicas e as incógnitas livres e determine colunas geradoras do conjunto das soluções.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) a transposta da matriz da alínea anterior;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

68. Para as matrizes das alíneas (c), (d) e (e) do exercício anterior, diga quais os vectores coluna b para os quais o sistema $Ax = b$ é possível e para esses escreva a solução geral do sistema.

69. Seja A uma matriz qualquer. Mostre que, se b for uma coluna de A, então o sistema $Ax = b$ é possível e indique uma solução.

70. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução geral do sistema homogéneo correspondente:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 16 \end{cases}$.

71. Ache a decomposição $A = LU$ com $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e resolva $Ax = b$ para os três segundos membros indicados. No final indique a inversa da matriz A.

(a) $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, (b) $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, (c) $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.