Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 6

66. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onde b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$. Resolva os seguintes sistemas:

(a) $Ax = b$;

(b) $PAx = b$;

(c) $Ax = Pb$;

(d) $LPUx = b$, onde L e U são as matrizes da factorização da matriz A acima.

67. Considere as seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) a transposta da matriz da alínea anterior;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Sendo A cada uma das matrizes acima,

(i) determine uma factorização LU de A, onde L é triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada (se tal não for possível, faça-o para PA, onde P é uma matriz de permutação adequada);

(ii) registe os pivots usados na eliminação e indique a característica de A;

(iii) determine, relativamente ao sistema $Ax = 0$, as incógnitas básicas e as incógnitas livres e determine colunas geradoras do conjunto das soluções.

68. Para as matrizes das alíneas (c), (d) e (e) do exercício anterior, diga quais os vectores coluna b para os quais o sistema $Ax = b$ é possível e para esses escreva a solução geral do sistema.

69. Seja A uma matriz qualquer. Mostre que, se b for uma coluna de A, então o sistema $Ax = b$ é possível e indique uma solução.

70. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução geral do sistema homogéneo correspondente:

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases} ;$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} ; \quad \text{(d)} \begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 16 \end{cases} .$$

71. Seja $A = LDU$ com D diagonal não-singular e L e U triangulares (resp. inferior e superior) de elementos diagonais iguais a 1. Prove que, se A for simétrica, então $U = L^T$. (Portanto, conclui-se que para matrizes não-singulares simétricas, a eliminação é mais simples.)

[**Sugestão**: Transponha ambos os membros da igualdade $A = LDU$ e use a unicidade da factorização LDU de A.]

72. Efectue a factorização LDL^T das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} ; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 25 & 10 \\ 7 & 25 & 39 & 22 \\ 3 & 10 & 22 & 5 \end{bmatrix} ; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix} .$$

73. Ache a decomposição $A = LU$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e resolva $Ax = b$ para os três segundos membros indicados. No final indique a inversa da matriz A.

(a) $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$; (b) $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$; (c) $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

74. Ache as inversas das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} ; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} ; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} .$$

75. Recorde que, se uma matriz é invertível, então pode escrever-se como um produto de matrizes elementares, matrizes de permutação e matrizes diagonais não-singulares. Escreva nessa forma as matrizes do exercício 74.