Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 7

76. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 1+i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} x & y & 1 & x+y \\ y & x+y & 0 & x \\ x+y & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

77. Dê exemplos de matrizes A e B que verificam $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

78. Resolva as seguintes equações polinomiais:

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

79. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

80. Utilize propriedades dos determinantes para provar que

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = 0.$

81. Sendo A uma matriz $n \times n$, qual é a relação com $\det A$ de

(a) $\det(2A)$? (b) $\det(-A)$?

82. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ * & * & e & f \\ * & * & g & h \end{bmatrix}$.

Mostre que $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Generalize este resultado para matrizes munidas de uma partição da forma $\left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right]$, onde B e D são matrizes quadradas (possivelmente de tipos distintos).

83. Verifique as seguintes igualdades:

(a) $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

(b) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 & 3 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & 4 & 4 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 & 5 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 & a+5 \end{vmatrix} = a^6.$$

84. (a) Sejam x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

(b) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Mostre, por indução, que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

O determinante acima é chamado determinante de Vandermonde de ordem n.

85. Mostre que se A for ortogonal então $|\det A| = 1$. Dê um exemplo de uma matriz ortogonal tal que $\det A = -1$.

86. Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir T invertível tal que $A = TBT^{-1}$. Prove que se A e B forem semelhantes então $\det A = \det B$.

87. Considere a matriz real

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores do parâmetro real μ para os quais a matriz C tem característica quatro.

88. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Diga para que valores do parâmetro real α a matriz A é invertível.

(b) Para os valores de α encontrados na alínea anterior determine a inversa de A.