Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 — Folha 8

105. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$: $a = (1, -1, 1, -1)$, $b = (1, 2, 3, 4)$, $c = (2, 1, 0, 3)$, $d = (0, -3, -2, -5)$. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por a e b. Averigúe se c e d são elementos de F.

106. Determine α e β de modo que o vector $(1, 1, \alpha, \beta)$ pertença ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1, 0, 2, 1)$ e $(1, -1, 2, 2)$.

107. Sendo $A_{m\times n}$, mostre que o espaço das colunas de A é o conjunto $\{Av \mid v_{n\times 1}\}$.

108. Prove que o espaço das colunas de BA está contido no de B.

109. Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^n$. Prove que, se existirem escalares α, β e γ (com α e γ não nulos) tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, então $\mathcal{L}(u, v) = \mathcal{L}(v, w)$.

110. Indique um conjunto gerador para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ encontrados nos exercícios 93.

111. Indique um conjunto gerador para o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}((2, 3, -1), (1, -1, -2)) \cap \mathcal{L}((0, 0, 1), (1, -1, -2)).$$

112. (a) Escreva o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(-4, 6)$ de várias maneiras diferentes.

     (b) Pode o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ escrever-se como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(4, 6)$ de mais que uma maneira?

113. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes (e no caso de dependência escreva um dos vectores como combinação linear dos outros):

     (a) $\{(1, -2, 3), (3, -6, 9)\}$; (b) $\{(1, -2, -3), (3, 2, 1)\}$;

     (c) $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$; (d) $\{(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)\}$;

     (e) $\{(1, -1, -1), (2, 3, 1), (-1, 4, -2), (3, 1, 2)\}$.

114. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (1, -1, 1, -1), \quad v_3 = (-2, 0, 1, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (3, -1, 3, -1).$$

     (a) Mostre que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

     (b) Mostre que v_1, v_2, v_4 são linearmente dependentes.

115. Discuta, segundo os valores de μ, a dependência ou independência linear dos vectores de $\mathbb{R}^4$:
$v_1 = (1, -2, -5, 8)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 5)$ e $v_3 = (1, 2, 11, \mu)$.

116. Diga para que valores de α, β e γ os vectores $(0, \gamma, -\beta)$, $(-\gamma, 0, \alpha)$, $(\beta, -\alpha, 0)$ são linearmente independentes.

117. Dados os vectores $u = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $v = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, $w = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ de $\mathbb{R}^5$, considerem-se os vectores $u' = (a_1, a_2, a_3)$, $v' = (b_1, b_2, b_3)$, $w' = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

    (a) Se u', v', w' são linearmente independentes, então u, v, w também o são.

    (b) Se u', v', w' são linearmente dependentes, então u, v, w também o são.

118. Sejam v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Diga se é linearmente independente cada um dos seguintes conjuntos de vectores:
(a) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$; (b) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$; (c) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$.

119. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $F \cap G = \{0\}$. Prove que, sendo $0 \neq x \in F$ e $0 \neq y \in G$, os vectores x e y são linearmente independentes.

120. Sejam v_1, v_2, $\ldots$,v_k vectores de $\mathbb{R}^n$ e suponha que um vector u é combinação linear deles. Prove que, se os vectores v_1, v_2, $\ldots$,v_k forem linearmente independentes, os coeficientes dessa combinação linear são univocamente determinados por u (isto é, u não se pode escrever como combinação linear desses vectores de mais de uma maneira). Reciprocamente, prove que, se u se escreve como combinação linear deles de uma única maneira, então v_1, v_2, $\ldots$,v_k são linearmente independentes.

121. Prove que a dependência ou independência linear de um conjunto de vectores não se altera se:
(a) trocarmos entre si dois vectores do conjunto;
(b) multiplicarmos um dos vectores do conjunto por um escalar não nulo;
(c) somarmos a um dos vectores outro do conjunto multiplicado por um escalar; mais geralmente, se somarmos a um vector uma combinação linear de outros vectores do conjunto.

122. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

    (a) Prove que S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine um conjunto gerador de S.

    (c) Averigúe se o conjunto encontrado na alínea (b) é linearmente independente.

    (d) Indique a dimensão e uma base de S.

123. Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$. Prove que para qualquer vector $v \in \mathbb{R}^n$ se verifica a seguinte equivalência
$$v \notin \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(S \cup \{v\}) = 1 + \dim \mathcal{L}(S).$$

124. Indique uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vector $v_1 = (1, 2)$.

125. Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vectores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 2, 1)$.

126. Prove que:

    (a) qualquer conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^n$ com n vectores é uma base;

    (b) qualquer conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$ com n vectores é uma base.
    (Por outras palavras, se o número de vectores for igual à dimensão, cada uma das propriedades que entram na definição de base implica a outra.)