Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 8

89. Calcule a matriz adjunta da matriz real $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e a partir desta a sua inversa.

90. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$ invertível.

    (a) Relacione o determinante da inversa de A com o determinante de A.

    (b) Relacione o determinante da adjunta de A com o determinante de A.

91. Considere a matriz real
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & \beta \end{bmatrix},$$
em que α e β são dois parâmetros reais. Determine, justificando, os valores de α e β para os quais o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$, é possível determinado, indicando, nesse caso, a sua solução.

92. Usando a Regra de Cramer resolva os seguintes sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 2t = 1 \\ x + y - 2z - t = -3 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$

93. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços:

    (a) $\{(x_1, 0, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

    (b) $\{(1, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

    (c) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$;

    (d) $\{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$;

    (e) $\{(x, x, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$;

    (f) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$.

94. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$;

    (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1 + x_3\}$;

    (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ e } x_2 = x_3\}$;

    (d) $\mathbb{Q}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$;

    (e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2, x_2^2, x_3^2 \in \mathbb{Q}\}$.

95. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = 0 \ \text{ e } x_3 = x_4\}$;

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ e } x_4 \text{ é um inteiro não nulo}\}$;

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_2 = 0\}$;

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$;

(e) $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq x_1 + x_2\right\}$.

96. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^n$:

(a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$;

(b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$;

(c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 3x_2 = x_3\}$;

(d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 \text{ é racional}\}$.

97. Considere-se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = \alpha\}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que E_α é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e só se $\alpha = 0$.

98. Considere os conjuntos $M = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $N = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(a) Prove que M e N são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine $M \cup N$ e $M \cap N$.

(c) Para cada um desses conjuntos, diga se é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

99. Prove que a intersecção de dois (ou mais) subespaços de $\mathbb{R}^n$ é ainda um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

100. Prove que a reunião de dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ só é um subespaço se um deles contiver o outro.

101. Mostre que $\mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$ é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém os vectores $v_1, \ldots, v_k$, isto é, que, se G é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém $v_1, \ldots, v_k$, então necessariamente $\mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq G$.

102. Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{p \times m}$ duas matrizes reais quaisquer. Prove que:

(a) O espaço nulo de A está contido no espaço nulo de BA.

(b) O espaço nulo de A coincide com o de $A^T A$.

103. Sejam S e T subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Prove que:
(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(T)$; (b) $S \subseteq T \subseteq \mathscr{L}(S) \Rightarrow \mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T)$.

104. Escreva o vector $(2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores:
(a) $(1, 0)$ e $(0, 1)$; (b) $(1, 1)$ e $(1, 2)$; (c) $(0, 1)$ e $(2, -3)$.

105. Diga se o vector $(1, 3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vectores $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Visualize geometricamente.

106. Diga se o vector $(2, 5, -3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 4, -2)$ e $(-2, 1, 3)$.