Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

1º Teste

26 de Março de 2004 Duração: 30m

1. Calcule o produto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4+1 & -4+2+2 & 2-4+2 \\ -4+2+2 & 4+1+4 & -2-2+4 \\ 2-4+2 & -2-2+4 & 1+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$

---

2. Usando o método de eliminação de Gauss, e indicando os pivots utilizados, resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ -2x + y + 2z = 3 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Resolução: $\begin{cases} 2x+2y+z &= 1 \\ -2x+y+2z &= 3 \\ x-2y+2z &= 5 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \mapsto L_2+L_1 \\ L_3 \mapsto L_3-\frac{1}{2}L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y+z &= 1 \\ 3y+3z &= 4 \\ -3y+\frac{3}{2}z &= \frac{9}{2} \end{cases} \overset{L_3 \mapsto L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{2}x+2y+z &= 1 \\ \mathbf{3}y+3z &= 4 \\ \boldsymbol{\frac{9}{2}}z &= \frac{17}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ y = -\frac{5}{9} \\ z = \frac{17}{9} \end{cases}$

Pivots (assinalados a negrito): $2, 3, \frac{9}{2}$.

---

3. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

(a) Existe uma matriz A tal que $A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Um sistema linear com três equações e quatro incógnitas é sempre indeterminado.

(c) Não existe nenhuma matriz real A quadrada de ordem n tal que $A^2 = -I_n$.

Resolução:

(a) Falsa. Seja $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ uma matriz real qualquer do tipo 2×2. Então, temos $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ 2z+2w & 2z+2w \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, uma vez que $1 \neq 3$.

(b) Falsa. O sistema pode ser impossível. Considere-se o seguinte sistema (de três equações e quatro incógnitas): $\begin{cases} x+y+z+w &= 0 \\ x+y+z+w &= 1 \\ x+y+z+w &= 2 \end{cases}$.

(c) Falsa. Para $n = 2$ considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz quadrada sobre o corpo dos reais). Tem-se então: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Contudo é verdadeira para n ímpar. Se n é ímpar então $\det(-I_n) = -1$. Por outro lado, $\det A^2 = (\det A)^2 \geq 0$, logo não existe A tal que $A^2 = -I_n$.

[Cotações: 20 + 35 + 45.]