

Não é permitido qualquer tipo de consulta. Justifique brevemente as suas respostas e indique todos os cálculos que efectuou.

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Factorize  $A$  na forma  $LU$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e  $U$  é uma matriz em escada de linhas.
- (b) Discuta a característica de  $A$  em função do parâmetro  $\alpha$ .
- (c) Para que valores de  $\alpha$  a matriz  $A$  é invertível? Para  $\alpha = 0$ , calcule a inversa de  $A$ .
- (d) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais o sistema  $Ax = b$  é impossível.
- (e) Usando a alínea (c), determine a solução de  $Ax = b$  quando  $\alpha = 0$ .

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

- (a) Seja  $A$  uma matriz do tipo  $n \times n$ . Se  $D$  for uma matriz diagonal de ordem  $n$ , então  $AD = DA$ .
- (b) Se  $A$  for uma matriz do tipo  $4 \times 2$ , então o sistema  $Ax = 0$  é possível e indeterminado.
- (c) Se a matriz  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  é invertível, então a matriz  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  também é invertível.
- (d) Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 5, então  $\det(-A) = -\det(A)$ .

3. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ .

Sem usar determinantes, prove que o produto  $AB$  é invertível se e só se  $A$  e  $B$  são ambas invertíveis.