

Não é permitido qualquer tipo de consulta. Justifique brevemente as suas respostas e indique todos os cálculos que efectuou.

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Factorize A na forma LU , onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais iguais a 1 e U é uma matriz em escada de linhas.
- (b) Discuta a característica de A em função do parâmetro α .
- (c) Para que valores de α a matriz A é invertível? Para $\alpha = 0$, calcule a inversa de A .
- (d) Determine os valores de α para os quais o sistema $Ax = b$ é impossível.
- (e) Usando a alínea (c), determine a solução de $Ax = b$ quando $\alpha = 0$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

- (a) Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Se D for uma matriz diagonal de ordem n , então $AD = DA$.
- (b) Se A for uma matriz do tipo 4×2 , então o sistema $Ax = 0$ é possível e indeterminado.
- (c) Se a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é invertível, então a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ também é invertível.
- (d) Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, então $\det(-A) = -\det(A)$.

3. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n .

Sem usar determinantes, prove que o produto AB é invertível se e só se A e B são ambas invertíveis.