Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 8

104. Considere uma matriz A, 4-por-2, cuja decomposição em valores singulares (na forma reduzida) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Qual é a característica da matriz A? E a sua norma euclidiana?

(b) Escreva a matriz A como uma soma de duas matrizes de característica 1.

(c) Indique os valores próprios de A^*A.

(d) Escreva uma forma completa para esta decomposição.

105. Escreva a DVS (formas reduzida e completa) de uma matriz-coluna (ou vector) $u \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$.

106. Escreva a DVS (formas reduzida e completa) de uma matriz-linha $v \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$.

107. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz com característica r e valores singulares positivos $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Mostre, usando propriedades da norma de Frobenius enunciadas em exercícios anteriores, que

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}.$$

108. Utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que o módulo do determinante de uma matriz quadrada é igual ao produto dos seus valores singulares.

109. Seja Q a matriz dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $P = I - QQ^*$ e mostre que se trata de um projector ortogonal.

(b) Sobre que subespaço projecta P ortogonalmente?

(c) Calcule a solução no sentido dos mínimos quadrados de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utilizando, apenas, a matriz Q.

(d) Calcule a decomposição em valores singulares de Q.

110. Considere um sistema de equações lineares da forma

$$Ax \;=\; b, \qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{C}^m,$$

com m e n números inteiros positivos a verificar $m < n$. Assuma que a característica da matriz A é igual a m.

(a) Quantos valores singulares não nulos tem A?

(b) Substitua A em $Ax = b$ pela transconjugada de $\hat{Q}\hat{R}$, em que $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ são os factores da decomposição $A^* = \hat{Q}\hat{R}$.

(c) Multiplique, depois, ambos os membros do sistema por $(\hat{R}^*)^{-1}$, indicando o resultado obtido. Classifique o sistema resultante desta operação.

111. Prove que a pseudo-inversa de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ com característica n pode ser escrita nas formas

$$A^+ \;=\; \hat{R}^{-1}\hat{Q}^* \quad \text{e} \quad A^+ \;=\; V\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^*,$$

dadas as respectivas decomposições matriciais (QR e em valores singulares na forma reduzida).

112. Quando $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ tem característica m, é possível definir uma inversa *à direita* de A, dada por

$$A^{\oplus} \;=\; A^*\left(AA^*\right)^{-1}.$$

(a) Prove que $AA^{\oplus} = I \in M_{m\times m}$.

(b) Escreva $A^{\oplus}$ em função da decomposição QR na forma reduzida de A^*.

(c) Escreva $A^{\oplus}$ em função da DVS de A dada na forma reduzida.

113. Considere um sistema de equações lineares da forma

$$Ax \;=\; b, \qquad A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{C}^m,$$

com m e n números inteiros positivos a verificar $m < n$. Assuma que a característica da matriz A é igual a m.

(a) Classifique o sistema e substitua A em $Ax = b$ pela sua decomposição em valores singulares (na forma reduzida $U\hat{\Sigma}\hat{V}^*$).

(b) Multiplique, depois, ambos os membros do sistema por U^* e $\hat{\Sigma}^{-1}$, por esta ordem, indicando o resultado obtido. Classifique, novamente, o sistema resultante destas operações.

(c) Mostre que $\hat{V}\hat{\Sigma}^{-1}U^*b$ é uma solução do sistema. Identifique esta solução como sendo $A^{\oplus}b$.