Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2000/01 Folha 10

134. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que:

(a) Se $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então x e y são ortogonais.

(b) Se $\|x\| = \|y\|$, então os vectores $x + y$ e $x - y$ são ortogonais.

(c) Se x e y forem ortogonais então $\|x + y\| = \|x - y\|$.

Interprete geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, as alíneas (c) e (d).

135. Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sendo θ o ângulo entre eles, mostre que $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\cos\theta$. (Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, isto é o clássico Teorema dos Co-senos, ou Teorema de Carnot, sobre triângulos.) Note que este enunciado generaliza o Teorema de Pitágoras.

136. Que múltiplo de $v_1 = (1, 1)$ devemos subtrair de $v_2 = (4, 0)$ para que o resultado seja ortogonal a v_1? Faça uma figura.

137. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ constituído pelos vectores ortogonais a $(1, -1, 1, -1)$ e a $(2, 3, -1, 2)$. Determine uma base para F. A partir dessa base determine uma base ortonormada para F.

138. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ a partir dos vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 3, 4)$.

139. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1, 1, -1, -2)$, $(-2, 1, 5, 11)$, $(0, 3, 3, 7)$ e $(3, -3, -3, -9)$. Determine a dimensão de F e encontre uma base ortonormada para F.

140. Projecte o vector $b = (1, 3, 2)$ sobre os vectores (não ortogonais) $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Mostre que, ao contrário do caso ortogonal, a soma das duas projecções não dá a projecção ortogonal de b sobre o subespaço gerado por v_1 e v_2.

141. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2, -2, 1)$ sobre o plano gerado pelos vectores $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 3)$.

142. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

(b) Designando por A a matriz do sistema, por b o vector dos segundos membros, e por $\overline{x}$ a solução encontrada, determine a projecção $p = A\overline{x}$ de b sobre o espaço das colunas de A.

(c) Calcule o erro $\|A\overline{x} - b\|$.

(d) Verifique que $b - p$ é perpendicular às colunas de A.

143. Mesmo exercício para o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

144. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita) $x = \beta_1,\ x = \beta_2, \ldots,\ x = \beta_m$.

145. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema do exercício 72.(d) substituindo o segundo membro da última equação por 0.

146. O sistema do exercício 72.(c) é impossível. Verifique que a solução no sentido dos mínimos quadrados desse sistema não é única. Seria isso de esperar? Porquê?

147. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente):

   (a) $(0,0),\ (1,0),\ (3,12)$;

   (b) $(-1,2),\ (1,-3),\ (2,-5),\ (0,0)$.

148. Ache uma fórmula geral para o declive e a ordenada na origem da recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(\alpha_1, \beta_1), \ldots,\ (\alpha_m, \beta_m)$.