Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 7

$\mathbb{R}^n$, Subespaços, Dimensão

79. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$:

    (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 + x_2 = 0 \ \text{ e } x_3 = x_4\}$;

    (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e x_4 é um inteiro não nulo$\}$;

    (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_2 = 0\}$;

    (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$.

80. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$. Define-se a sua soma como sendo o conjunto $F + G = \{v + w : v \in F \text{ e } w \in G\}$. Mostre que

    (a) $F + G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

    (b) $F + G$ contém F e G (ou seja, contém $F \bigcup G$).

    (c) $F + G$ é o menor subespaço de V que contém $F \bigcup G$, isto é, para todo o subespaço H que contém $F \bigcup G$ tem-se $F + G \subseteq H$.

81. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$ e considere-se o subespaço $H = F + G$. Diz-se que H é a soma directa de F com G e escreve-se $H = F \bigoplus G$ se $F \bigcap G = \{0\}$.
    Mostre que $H = F \bigoplus G$ se e só se o vector nulo de $\mathbb{R}^n$ se escreve de modo único como soma de um vector de F com um vector de G.

82. Diga se o vector $(2, 5, -3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 4, -2)$ e $(-2, 1, 3)$.

83. Determine α e β de modo que o vector $(1, 1, \alpha, \beta)$ pertença ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1, 0, 2, 1)$ e $(1, -1, 2, 2)$.

84. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

    $$v_1 = (1, 0, 2), \ v_2 = (1, -1, 1), \ v_3 = (0, -1, -1), \ v_4 = (1, -1/2, 3/2).$$

    Prove que o subespaço gerado por v_1 e v_2 coincide com o subespaço gerado por v_3 e v_4.

85. Descreva geometricamente o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por:

    (a) $(0, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 2, 0)$; (b) $(0, 0, 1), \ (0, 1, 1), \ (0, 2, 1)$;

    (c) os seis vectores indicados em (a) e (b).

86. Sendo A $m \times n$, mostre que o espaço das colunas de A é o conjunto $\{Av : \ v \in \mathbb{R}^n\}$.

87. Sejam S e T subconjuntos finitos e não vazios de $\mathbb{R}^n$. Prove que:

   (a) $S \subseteq T \Longrightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$.

   (b) $\mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S \cup T)$.

   (c) $\mathcal{L}(S) = S \Longleftrightarrow S$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

   (d) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Longrightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$.

88. Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se existirem números α, β e γ (com α e γ não nulos) tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, então $\mathcal{L}\{u, v\} = \mathcal{L}\{v, w\}$.

89. Escreva o vector $(2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores

   (a) $(1, 0)$ e $(0, 1)$; (b) $(1, 1)$ e $(1, 2)$; (c) $(0, 1)$ e $(2, -3)$.

90. (a) Escreva o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(-4, 6)$ de várias maneiras diferentes.

   (b) Pode o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ escrever-se como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(4, 6)$ de mais que uma maneira ?

91. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes e em caso de dependência escreva um dos vectores como combinação linear dos outros:

   (a) $\{(1, -2, 3), (3, -6, 9)\}$; (b) $\{(1, -2, -3), (3, 2, 1)\}$;
   (c) $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$; (d) $\{(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)\}$;
   (e) $\{(1, -1, -1), (2, 3, 1), (-1, 4, -2), (3, 1, 2)\}$.

92. Considere os vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, 1, 0),\ v_2 = (1, -1, 1, -1),\ v_3 = (-2, 0, 1, 2),\ v_4 = (3, -1, 3, -1).$$

   (a) Mostre que $v_1,\ v_2,\ v_3$ são linearmente independentes.

   (b) Mostre que v_1, v_2, v_4 são linearmente dependentes.

93. Discuta segundo os valores de μ a dependência ou independência linear dos vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, -2, -5, 8),\ v_2 = (-1, 1, 1, 5),\ v_3 = (1, 2, 11, \mu).$$

94. Diga para que valores de α, β e γ, os vectores $(0, \gamma, -\beta)$, $(-\gamma, 0, \alpha)$, $(\beta, -\alpha, 0)$ são linearmente independentes.

95. Sejam v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Diga se é linearmente independente cada um dos seguintes conjuntos de vectores:

   (a) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$; (b) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$;

   (c) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$.

96. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $F \cap G = \{0\}$. Prove que, sendo $0 \neq x \in F$ e $0 \neq y \in G$, os vectores x e y são linearmente independentes.