Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear/Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ano lectivo 2001/02 Folha 9

114. Para cada uma das matrizes do exercício 70:

- indique a característica e a nulidade;

- determine uma base para o espaço das linhas e uma base para o espaço das colunas.

115. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde α é um parâmetro real. Determine para que valores de α a característica de A é, respectivamente, $1, 2$ e 3. Em cada caso, determine bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo de A.

116. O mesmo que no exercício 115 para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

117. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, \alpha, 1), \qquad v_2 = (1, \alpha - 1, 1) \qquad v_3 = (1, \alpha + 1, 1), \qquad v_4 = (\alpha, 1, 1).$$

Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o subespaço gerado por estes quatro vectores tem dimensão 2.

118. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vector $(1, 0, 1)$.

119. Existirá uma matriz cujo espaço das linhas contenha o vector $(1, 1, 1)$ e cujo espaço nulo contenha o vector $(1, 0, 0)$?

120. Se A for uma matriz 64×17 com característica 11, quantos vectores linearmente independentes satisfazem $Ax = 0$? E quantos vectores linearmente independentes satisfazem $A^T y = 0$?

121. Será verdade que para qualquer matriz A se tem $nul(A) = nul(A^T)$?

122. Seja A $n \times n$. Prove que, se $A^2 = A$ e $car(A) = n$, então $A = I$.

123. Escreva na forma uv^T as seguintes matrizes de característica 1 :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

124. Prove que, se uma matriz quadrada A satisfaz $A^2 = A$, então $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{ \ 0 \ \}$.

Ângulos e Distâncias em $\mathbb{R}^n$

125. (a) Mostre que $\langle 0, v \rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que, se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = 0$.

(c) Mostre que, se $\langle u, v \rangle = \langle u', v \rangle$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = u'$.

126. Se os vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ forem ortogonais, mostre que, quaisquer que sejam os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, os vectores $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_k v_k$ são também ortogonais.

127. Prove que, se um vector w for ortogonal a cada um dos vectores $v_1, v_2, ..., v_k$ também é ortogonal a qualquer combinação linear deles.

128. Que mudança se dá no ângulo entre os vectores não nulos x e y se

a) se multiplicar x por um número positivo ?

b) se multiplicar x por um número negativo ?

c) se multiplicar x e y por números negativos ?

129. No espaço $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (-3, 0, 1)$.

(a) Verifique que u e v são ortogonais.

(b) Calcule as normas de u e de v.

(c) Escreva os vectores $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$.

130. Calcule o ângulo que o vector $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ faz com os vectores da base canónica.

131. Seja $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base <u>ortonormada</u> de $\mathbb{R}^n$. Seja x um vector com norma 1. Demonstre que as coordenadas de x na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são iguais aos co-senos dos ângulos $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ de x com os vectores da base. Conclua que $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \theta_i = 1$.

(**Nota:** Aos valores $\cos \theta_1, \cos \theta_2, ..., \cos \theta_n$ chamamos <u>co-senos directores</u> do vector x.)

132. Mostre que o triângulo em $\mathbb{R}^3$ cujos vértices são $u = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $v = (1, -\sqrt{2}, 1)$ e $w = (-1, \sqrt{2}, -1)$ é rectângulo e isósceles.

133. Deduza, a partir da desigualdade triangular, que, sendo x, y e z quaisquer, se tem $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$. Qual é o significado geométrico desta desigualdade em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$?