Cálculo Infinitesimal II — Exame – 14/06/00

Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE COIMBRA

Duração: 2h 30m

ATENÇÃO: Justifique todas as suas respostas.

1. (a) Descreva o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2$ através de uma curva em coordenadas paramétricas e faça-o de duas formas diferentes.

   (b) Qual é a curva cujo comprimento é calculado através de

$$\int_0^2 \sqrt{1+4t^2}\, dt \ ?$$

2. Considere a função $f(x) = e^{e^x}$.

   (a) Calcule a fórmula de Taylor de grau 2 em torno do ponto 0 com resto de Lagrange.

   (b) Seja $x = 0$ e considere, agora, a função $g(x) = e^{e^x} - e - e\,x - e\,x^2$. Diga que tipo de ponto se trata: minimizante, maximizante ou ponto de inflexão.

3. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

   (a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n-1}}{2(n+1)!}.$$

   (b)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \cos(\pi n) \frac{\ln n}{n}.$$

   (c)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

   (d) Deduza, a partir das alíneas b e c, o raio de convergência da série de potências

$$g(x) \ = \ \sum_{n=3}^{+\infty} \cos(\pi n) \frac{\ln n}{n} x^n.$$

   (e) Determine $g^{(40)}(0)$.

v.s.f.f.

4. Considere a sucessão de funções $\{f_n(x)\}$ definida por:

$$\begin{array}{cccc} f_n: & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & nx(1-x)^n \,. \end{array}$$

   (a) Determine o limite pontual de $\{f_n(x)\}$.

   (b) Averigúe se a convergência é uniforme.

5. Desenvolva em série de potências de x a função

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

indicando o intervalo de convergência.
Sugestão: $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots$ se $|y| < 1$ e $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$.

6. Considere a seguinte função real de duas variáveis reais:

$$f(x,y) = e^{x-\ln y}\,.$$

   (a) Indique o domínio da função e o seu interior.

   (b) Indique o contradomínio da função e a sua fronteira.

   (c) Qual é o domínio de continuidade da função? Em que factos é que se baseia a sua resposta.

   (d) Calcule o gradiente e a Hessiana da função.

7. Calcule

$$\int_0^5 \int_0^{e^y} x\,dx\,dy\,.$$

e descreva geometricamente a região de integração.