Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 1 – TP1

Data de recepção: **21/09/2004**; Data de entrega: **12/10/2004**

1. Prove que a sucessão $\{x_k\}$ definida por $(0.5)^{2^k}$ se k for par e x_{k-1}/k se k for ímpar converge para 0 q-superlinearmente.

2. Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{x_1} - 1 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

   Indique um valor para constante de Lipschitz da matriz Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

3. Prove, nas condições do Teorema 1 da Aula 3 e utilizando os seus resultados, que a sucessão $\{F(x_k)\}$ converge quadraticamente para o vector nulo.

4. Este exercício é para ser resolvido em MATLAB. As duas primeiras alíneas deverão ser justificadas matematicamente.

   (a) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não seja inferior a 10^{-4}.

   (b) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual $H + E$ seja definida positiva (sem recorrer ao cálculo de valores próprios de H).

   (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos numa implementação do método de Newton modificado para optimização sem restrições.

Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2004/05

Trabalho 1 – TP2

Data de recepção: **21/09/2004**; Data de entrega: **12/10/2004**

1. Prove que a sucessão $\{x_k\}$ definida por $x_{k+1} = 1/2(x_k + 4/x_k)$ e $x_0 = 4$ converge para 2 q-quadraticamente.

2. Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) \;=\; \begin{bmatrix} e^{x_1} - e^{x_2} \\ \frac{1}{3}x_2^3 \end{bmatrix}.$$

   Indique um valor para constante de Lipschitz da matriz Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

3. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k \;=\; -F(x_k) + e_k,$$

   em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1 da Aula 3, que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \;\leq\; c\|F(x_k)\|^2 \qquad \text{para todo o } k.$$

4. Este exercício é para ser resolvido em Matlab. As duas primeiras alíneas deverão ser justificadas matematicamente.

   (a) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não seja inferior a 10^{-4}.

   (b) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual $H + E$ seja definida positiva (sem recorrer ao cálculo de valores próprios de H).

   (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos numa implementação do método de Newton modificado para optimização sem restrições.