# Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2005/06

## Trabalho 2

Data de recepção: **26/09/2005**; Data de entrega: **17/10/2005** (na aula teórica)

1. Sejam $x_*$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $F$ uma função de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ tais que a matriz Jacobiana de $F$ é não singular em $x_*$ e é contínua à Lipschitz num aberto contendo $x_*$.
   Seja $\{x_k\}$ uma sucessão de $\mathbb{R}^n$ a convergir para $x_*$, gerada da seguinte forma:
   $$x_{k+1} \;=\; x_k + s_k \qquad \text{com} \qquad J(x_k)s_k = -F(x_k) + r_k\,,$$
   em que $r_k$ é um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $s_k \neq 0$ para todo o $k$.
   (a) Prove que $s_k$ satisfaz:
   $$A_k s_k \;=\; -F(x_k) \quad \text{em que} \quad A_k \;=\; J(x_k) - \frac{r_k s_k^\top}{s_k^\top s_k}.$$
   (b) Recorrendo à expressão da alínea anterior e a um resultado dado nas aulas, mostre que, sob determinadas condições, $\{x_k\}$ converge q-superlinearmente para $x_*$ se e só se
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|r_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0\,.$$

2. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e com matriz Jacobiana não singular em $\mathbb{R}^n$.
   Considere o sistema de equações não lineares
   $$F(x) \;=\; 0$$
   e o problema de mínimos quadrados
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|F(x)\|^2.$$
   (a) Escreva a direcção de descida máxima para o problema de mínimos quadrados.
   (b) Qualquer ponto estacionário deste problema de optimização é solução do sistema. Porquê?
   (c) Prove que o passo de Newton para o sistema de equações não lineares é uma direcção de descida para o problema de mínimos quadrados (se $F(x) \neq 0$).
   (d) Mostre que o método de Newton para o sistema de equações não lineares coincide com o método de Gauss–Newton para o problema de mínimos quadrados.

3. Mostre que o método de Newton converge numa iteração quando aplicado à função

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}x^\top Hx + g^\top x,$$

com $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não singular e $g \in \mathbb{R}^n$.

4. Este exercício é para ser resolvido em MATLAB. As duas primeiras alíneas deverão ser justificadas matematicamente.

   (a) Escreva uma função que, dada a matriz $H$ simétrica, devolva uma matriz simétrica $E$ para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não seja inferior a $10^{-4}$.

   (b) Escreva uma função que, dada a matriz $H$ simétrica, devolva uma matriz simétrica $E$ para a qual $H + E$ seja definida positiva (sem recorrer ao cálculo de valores próprios de $H$).

   (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos numa implementação do método de Newton modificado para optimização sem restrições.

5. Considere o problema de mínimos quadrados lineares em que $R(x) = Ax - b$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem característica $n$, com $m > n$.

   (a) Identifique a solução única $x_*$.

   (b) Escreva o gradiente e a Hessiana de $f = R^\top R/2$ num ponto $x_k$.

   (c) Prove que o método de Gauss-Newton precisa de apenas uma iteração para convergir para $x_*$.