PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR – Exame – 09/07/02

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h30m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem-se consultar o livro adoptado e os apontamentos das aulas.

---

1. Uma técnica de globalização deve deixar o passo de Newton ser aceite perto de um ponto a satisfazer as condições que garantem a taxa de convergência q-quadrática do método de Newton.
   Descreva os resultados que indicam que este comportamento acontece, de facto, nas técnicas de procura unidireccional e de região de confiança.

2. Seja x^* um ponto de $\mathbb{R}^n$ e f uma função de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$ tais que a Hessiana de f é contínua à Lipschitz num aberto contendo x^* e definida positiva em x^* ($n \in \mathbb{N}$).
   Seja $\{x_k\}$ uma sucessão de $\mathbb{R}^n$ a convergir para x^*, gerada da seguinte forma:
   $$x_{k+1} \;=\; x_k + p_k \qquad \text{com} \qquad \nabla^2 f(x_k) p_k = -\nabla f(x_k) + r_k \,,$$
   em que r_k é um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $p_k \neq 0$ para todo o inteiro não negativo k.
   Assuma, para facilitar a apresentação, que a Hessiana de f é definida positiva em todos os pontos da sucessão $\{x_k\}$.

   (a) Indique uma condição suficiente para que p_k seja uma direcção de descida.

   (b) Considere a função objectivo $f(x_1, x_2) = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$ e o ponto $x_0 = (1,1)^\top$. Seja $r_0 = (-2,1)^\top$. Com base no sinal de $\nabla f(x_0)^\top r_0$, diga por que é que p_0 é uma direcção de descida.

   (c) Mostre que p_k satisfaz:
   $$\left(\nabla^2 f(x_k) - \frac{r_k p_k^\top}{p_k^\top p_k} \right) p_k \;=\; -\nabla f(x_k)\,.$$

   (d) Recorrendo ao resultado da alínea anterior, prove que $\{x_k\}$ converge q-superlinearmente para x^* se e só se
   $$\lim_{k \to +\infty} \frac{\|r_k\|}{\|p_k\|} \;=\; 0\,.$$

v.s.f.f.

3. Considere o seguinte problema de regiões de confiança:

$$\min \quad f + g^\top s + \frac{1}{2} s^\top B s \quad \text{s.a.} \quad \|s\|_2 \leq \Delta_1 \quad \text{e} \quad \|s - a\|_2 \leq \Delta_2 \, ,$$

em que g e a são vectores de $\mathbb{R}^n$, B é uma matriz simétrica $n \times n$, f é um real e Δ_1 e Δ_2 são reais positivos ($n \in \mathbb{N}$). Assuma que $\|a\|_2 \leq \Delta_1$.
Mostre que um minimizante local s deste problema para o qual $\|s\|_2 < \Delta_1$ satisfaz

$$(B + \lambda_2 I) \, s \; = \; -g + \lambda_2 a$$

em que λ_2 é um real não negativo.

4. Considere o seguinte problema de programação não linear:

$$\min \quad \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \quad \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 \leq 2 \, , \quad x_1 \leq 1 \, , \quad x_2 \leq 1 \, .$$

(a) Resolva o problema geometricamente, confirmando, depois, que no minimizante obtido, o simétrico do gradiente da função objectivo pertence ao cone normal.

(b) Escreva as condições necessárias de primeira ordem no ponto obtido anteriormente, indicando qual a qualificação de restrições que é verificada.

(c) Será possível encontrar um vector de multiplicadores tal que a condição de complementaridade estrita é verificada? E se a função objectivo fosse $\frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2$?

(d) Escreva a função de barreira logarítmica para este problema. Como é que encontraria, numericamente, um ponto inicial para o método da barreira logarítmica?