

Programação Não Linear

Ano Lectivo 2003/04

Trabalho 1: Teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

Data de recepção: **17/02/2004**; Data de entrega: **02/03/2004**

Exercícios sobre teoria e fundamentos numéricos de optimização não linear sem restrições

1. Seja $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}x^\top x$, $x \in \mathbb{R}^n$, e $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares possível e indeterminado com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ (n e m são inteiros positivos).
 - (a) Prove que S é um conjunto convexo e fechado.
 - (b) Mostre que f é contínua e uniformemente convexa em S .
 - (c) Caracterize a existência e unicidade de minimizantes (de f em S) com base apenas nos resultados dados na aula teórica.
2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n . Dado um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ em que a matriz Hessiana é não singular, considere a direcção $d(y)$ definida por

$$d(y) = -\nabla f(y) - \nabla^2 f(y)^{-1} \nabla f(y).$$

- (a) Mostre que $d(y)$ é uma direcção de descida quando $\nabla^2 f(y)$ é definida positiva e $\nabla f(y) \neq 0$.
 - (b) Mostre que $d(y)$ é uma direcção de descida se $\|\nabla^2 f(y)^{-1}\|_2 < 1$ e $\nabla f(y) \neq 0$.
 - (c) Considere, agora, as funções reais de duas variáveis reais $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^2 + 4x_1x_2$ e $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2^2$. Seja $y = (1, 1)^\top$. Calculando apenas $\nabla^2 f(y)$ e os seus valores próprios, mostre que $d(y)$ é, para ambas as funções, uma direcção de descida.
 - (d) Em que outras situações, para além das descritas nas alíneas a e b, é que $d(y)$ é uma direcção de descida?
3. Mostre que a sucessão $\{1 + 10^{-k}\}$ converge para 1 q-linearmente.
 4. Prove que a sucessão $\{1 + (0.5)^{2^k}\}$ apresenta uma taxa de convergência q-quadrática para 1.
 5. Estude a taxa de convergência da sucessão $\{x_k\}$ definida por $(0.5)^{2^k}$ se k for par e x_{k-1}/k se k for ímpar.

Em caso de omissão utilizam-se as convenções e notações do Livro J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

Exercícios de iniciação ao MATLAB

Estes exercícios têm por objectivo iniciar a utilização do pacote de *software* MATLAB, desenvolvido para Cálculo Científico e Análise e Álgebra Linear Numéricas.

O MATLAB é uma marca registada pela The MathWorks, Inc. (endereço de correio electrónico info@mathworks.com e endereço na *Web* <http://www.mathworks.com>). O comando `help` pode ser utilizado para descobrir o modo de utilização de qualquer outro comando. Executando o comando `doc` tem-se acesso a uma página contendo o manual de utilização.

Para cada exercício, entregue as funções que forem pedidas e o diário da sua sessão de MATLAB. O diário pode ser gravado num ficheiro através do comando `diary`. Utilize `format compact` para poupar espaço. Utilize também `format long`, a fim de o conhecer.

1. Execute os seguintes comandos em MATLAB:

```
x      = (-128:128)'/128;
A      = [x.^0 x.^1 x.^2 x.^3];
[Q,R] = qr(A,0);
scale = Q(257,:);
Q      = Q*diag(1 ./scale);
plot(Q)
```

- (a) Explique o que é que a execução de cada comando está a realizar.
 - (b) Trace na mesma figura e nos mesmos 257 pontos do eixo das abcissas os primeiros quatro polinómios de Legendre $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ e $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.
 - (c) Calcule as normas ℓ_2 dos vectores erro obtidos subtraindo as quatro colunas de Q aos respectivos quatro vectores utilizados em (b). Como é que está feita a distribuição do erro ao longo das 257 componentes de cada vector erro?
2. Nas alíneas a e b explique o raciocínio matemático que sustenta a correspondente implementação.
 - (a) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolve uma matriz simétrica E para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não é inferior a 10^{-4} .
 - (b) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolve uma matriz simétrica E para a qual $H + E$ é definida positiva (sem calcular valores próprios de H).
 - (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos em optimização não linear (sem restrições).