

Duração: 2h30m

13/01/2010

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

(12.0) I - Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n ($n > 1$) de uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo uma lei Q_θ , com $\theta \in \Theta$. Considere uma função g definida sobre Θ e com valores em A ($A \subseteq \mathbb{R}$) e uma estatística, associada à amostra, T_n .

1. Diga em que condições será T_n um estimador de $g(\theta)$ assintoticamente cêntrico.
2. Nas condições da questão anterior, mostre que T_n é um estimador de $g(\theta)$ convergente em média quadrática se a sua variância existir e convergir para zero.
3. Suponha agora que X segue uma lei normal $N(m, \sigma)$. Considere as estatísticas média e variância da amostra, respectivamente,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- a) Prove que S_n^2 é um estimador de σ^2 convergente em média quadrática.
 - b) Conclua que (\bar{X}_n, S_n^2) é um estimador de (m, σ^2) assintoticamente cêntrico e convergente em probabilidade.
4. Num sistema de transmissão digital, a informação é representada por sinais eléctricos. Devido a flutuações de voltagem no sistema, a transmissão de tais sinais é sistematicamente afectada por um ruído, cuja intensidade é descrita por uma v.a.r. X . Pretendendo-se verificar se o nível do ruído está dentro de valores considerados aceitáveis, foram analisados 25 sinais escolhidos aleatoriamente de entre os enviados, estando as intensidades dos ruídos que afectaram esses sinais resumidas no quadro seguinte:

Intensidade do ruído (volts)	$] - 0.6, -0.3]$	$] - 0.3, 0]$	$]0, 0.3]$	$]0.3, 0.6]$
n.º de sinais	2	12	10	1

- a) A partir da amostra observada, determine uma estimativa dos momentos de (m, σ) .
- b) Teste a hipótese da intensidade do ruído, X , ser distribuída de acordo com uma lei normal.
- c) A estimação intervalar da variância de X , com base na amostra observada e assumindo verdadeira a hipótese anteriormente testada, conduziu ao intervalo, de caudas igualmente ponderadas, $]0.0251, 0.099[$. Determine o grau de confiança de tal estimação.

(8.0) II - A fim de avaliar a eventual relação de dependência que existe entre a altura na idade adulta e a altura durante criança, foram observados 250 rapazes de 18 anos tendo-se registado para cada um deles a respectiva altura (Y) bem como aquela que tinham aos 4 anos (x).

1. Começou por se efectuar a análise descritiva da variável estatística marginal Y a partir de uma classificação da amostra, em 5 intervalos de igual amplitude, no intervalo de observação $[1.7, 1.95]$. Apresenta-se abaixo a tabela de frequências fornecida pelo *software* estatístico SPSS.

	Frequency	Percent	Cumulative Percent
Valid	1,725	40	16,0
	1,775	95	38,0
	1,825	89	35,6
	1,875	24	9,6
	1,925	2	,8
Total	250	100,0	

- a) Obtenha a função das frequências acumuladas associada a esta distribuição estatística.
- b) Com base na amostra observada, estime a ordem do percentil de um jovem com 1,8 m de altura. Interprete o resultado obtido.

2. Foi estudada, com o recurso ao mesmo *software* estatístico, a existência de uma relação linear da forma $Y_n = ax_n + b + U_n$ ($n = 1, 2, \dots$), com (U_n) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão σ ($\sigma > 0$, desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

	Mean	Std. Deviation
altura18	1,7952	,04262
altura4	1,0465	,02440

Pearson Correlation	altura18	altura4
altura18	1,000	,885
altura4	,885	1,000

- a) Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Que pode afirmar sobre a relação de dependência existente entre as variáveis em estudo?
- b) No quadro abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão efectuada sobre os dados.

Model		Unstandardized Coefficients	t	Sig.	98,0% Confidence Interval for B	
		B			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	,178	3,286	,001	,051	,304
	altura4	1,546	29,957	,000	1,425	1,667

a. Dependent Variable: altura18

	Unstandardized Residual
Normal Parameters ^{a,b} Mean	,0000000
Std. Deviation	,01983179
Kolmogorov-Smirnov Z	,534
Asymp. Sig. (2-tailed)	,938

a. Test distribution is Normal.

- (i) Indique a relação linear estimada e tire conclusões sobre a adequação, aos dados observados, do modelo estocástico considerado.
- (ii) Indique intervalos de confiança para os coeficientes do modelo, precisando o grau de confiança. Permitirá a amostra observada concluir que o coeficiente a é significativamente diferente de zero?
- (iii) Sabendo que a soma dos quadrados dos resíduos é igual a 0.098 teste, ao nível de significância 0.05, as hipóteses

$$H_0 : \sigma = 0.01 \text{ contra } H_1 : \sigma > 0.01.$$
