

**Observação:** A resolução completa das questões inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

(13.0) **I.** Seja  $\mathcal{E}$  uma experiência aleatória e  $A$  um acontecimento associado a  $\mathcal{E}$  de probabilidade  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ). Sejam  $X$  a variável aleatória real  $\mathbb{I}_A$  e  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória de dimensão  $n$  de  $X$ .

1. Indique o modelo estatístico associado a  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
2. Obtenha um estimador da máxima verosimilhança,  $T_n$ , de  $p$  e prove que é único.
3. Conclua que  $T_n$  é um estimador de  $p$  convergente, precisando os modos de convergência. Interprete o resultado obtido.
4. Obtenha um estimador do desvio padrão de  $X$  convergente quase certamente.
5. Deduza a lei limite da v.a.r.

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{T_n - p}{\sqrt{T_n(1 - T_n)}}.$$

6. Com o objectivo de avaliar se determinado referendo a uma população poderá vir a ser considerado significativo, pretende-se inferir a correspondente proporção de abstenção,  $p$ , a partir duma amostra de  $n$  eleitores aleatoriamente escolhidos.
  - a) Obtenha um valor para a dimensão,  $n$ , da amostra a observar que lhe permita garantir, com uma confiança de 95%, uma estimação intervalar para  $p$  de precisão quando muito igual a 0.03.
  - b) Sabendo que foram inquiridos 5000 eleitores dos quais 2450 declararam vir a abster-se, teste, ao nível de significância 0.05, as hipóteses

$$H_0 : p = 0.5 \text{ contra } H_1 : p < 0.5.$$

- c) Com base na mesma amostra, que decisão tomaria ao nível de significância 0.01? Justifique convenientemente a sua resposta.

(7.0) **II.** Para estudar a influência de um preparado de insulina,  $\mathbf{x}$ , na redução do nível de açúcar,  $Y$ , foi feita uma experiência em 30 cobaias saudáveis, tendo-se registado para cada valor  $x_n$  de  $\mathbf{x}$  o correspondente valor do nível de açúcar  $y_n$  de  $Y$ . Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear da forma  $Y_n = ax_n + b + U_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 30$ ), com  $(U_n)$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ , desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	N
nível	47.37	10.287	30
insulina	35.53	8.874	30

Correlations

		nível	insulina
Pearson Correlation	nível	1.000	.877
	insulina	.877	1.000
Sig. (1-tailed)	nível	.	.000
	insulina	.000	.
N	nível	30	30
	insulina	30	30

1. Qual a média e a covariância empírica da amostra observada? Que pode concluir sobre a existência de uma dependência funcional linear entre as variáveis em estudo?

Nos quadros abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão linear efectuada sobre os dados.

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B		
	B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound	
1	(Constant)	11.247	3.854		2.918	.007	3.352	19.143
	insulina	1.016	.105	.877	9.649	.000	.801	1.232

a. Dependent Variable: nivel

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Unstandardized Residual
N		30
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	.0000000
	Std. Deviation	4.94642100
Most Extreme Differences	Absolute	.095
	Positive	.095
	Negative	-.065
Kolmogorov-Smirnov Z		.522
Asymp. Sig. (2-tailed)		.948

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

- Indique a relação linear estimada e tire conclusões sobre a adequação, aos dados observados, do modelo estocástico considerado.
- Indique intervalos de confiança para os coeficientes do modelo. Permitirá a amostra concluir que o coeficiente  $a$  é significativamente diferente de zero?
- Mostre que  $V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{30} U_i^2$  é uma variável fulcral para o modelo estatístico em estudo.
- Com base nos resultados obtidos e sabendo ainda que a soma dos quadrados dos resíduos da estimação é igual a 709.545, deduza um intervalo real que contenha  $\sigma$  com 98% de confiança.