

Frequência de Estatística

Duração: 2h 00m

15-12-2011

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. O tempo de vida (em anos) de um certo tipo de componentes de um sistema informático é bem descrito por uma variável aleatória real X absolutamente contínua com função densidade definida por

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

com θ um parâmetro real estritamente positivo, desconhecido. Seja (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n de X , $n \in \mathbb{N}$.

- Mostre que $Y = X^2$ segue a lei exponencial de média θ .
- Prove que $U_{n,\theta} = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i^2$ é uma variável fulcral para o modelo estatístico em estudo.
- Dado $\alpha \in]0, 1[$ deduza, a partir de $U_{n,\theta}$, um intervalo de confiança para θ de caudas igualmente ponderadas e confiança α .
- Recolheu-se uma amostra de dimensão 100, $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$, para a qual $\bar{x} = 1.25$ e $s^2 = 0.48$.
 - A partir da amostra observada obtenha um intervalo real que contenha θ com uma confiança de 98%.
 - Deduza um intervalo real que, com uma confiança de 98%, contenha a probabilidade das referidas componentes durarem pelo menos 1 ano.
 - Construa um teste que permita decidir entre as hipóteses

$$H_0 : \theta = 1 \text{ contra } H_1 : \theta = 2$$

ao nível de significância 0.05.

- Indique a decisão a que conduz a amostra observada e qual a probabilidade do erro associado a essa decisão.
2. Com o objectivo de tirar conclusões sobre a relação existente entre a idade e os valores da tensão arterial na população feminina, foram observadas 100 mulheres saudáveis escolhidas aleatoriamente entre as residentes numa determinada região do país. Os valores Y_n da tensão arterial foram registados para cada valor x_n da idade das mulheres observadas ($n = 1, 2, \dots, 100$). Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear da forma $Y_n = ax_n + b + U_n$ ($n = 1, 2, \dots, 100$), com (U_n) variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal centrada de desvio padrão σ ($\sigma > 0$, desconhecido). A análise descritiva dos dados conduziu aos seguintes resultados:

	Mean	Std. Deviation
TensaoArt	13,4571	1,73155
idade	47,53	14,732

	TensaoArt	idade
Pearson Correlation	1,000	,910
	,910	1,000

- Indique a média e o coeficiente de correlação da amostra observada. Que pode afirmar sobre a relação de dependência existente entre as variáveis em estudo?

- b) No quadro abaixo encontram-se os resultados correspondentes à regressão efectuada sobre os dados.

Model	Coefficients		t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B	
	B	Std. Error			Lower Bound	Upper Bound
1 (Constant)	8,371	,244	34,259	,000	7,886	8,856
idade	,107	,005	21,782	,000	,097	,117

a. Dependent Variable: TensaoArt

- (i) Indique a relação linear estimada bem como os intervalos de confiança para os coeficientes do modelo.
- (ii) Permitirá a amostra observada concluir que o coeficiente a é significativamente diferente de zero? E quanto ao coeficiente b ?
- c) No quadro seguinte estão classificados os valores dos resíduos resultantes da estimação efectuada.

Resíduos	$[-3, -1]$	$] -1, 0]$	$] 0, 1]$	$] 1, 2]$
Frequência	6	44	42	8

Além disso, a soma dos quadrados desses resíduos é 50.81. Poderá concluir que os resíduos observados são compatíveis com a hipótese de normalidade feita sobre a lei de U_n , $n = 1, 2, \dots, 100$?

Cotação:

1. 14 valores
2. 6 valores