Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Estatística

Duração: 2h 30min — 01-02-2011

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

---

1. Seja $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais, independentes e identicamente distribuídas com uma variável aleatória real (v.a.r.) X que admite valor médio m e variância σ^2, com $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, respectivamente, a média e a variância da correspondente amostra aleatória de dimensão n.

a) Prove que S_n^2 é um estimador de σ^2 quase certamente convergente.

b) Estabeleça a lei limite da v.a.r. $Z_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - m}{S_n}$.

2. Uma equipa de biólogos dedicou-se ao estudo de certa espécie de ursos, tendo observado durante um ano 44 animais adultos daquela espécie selecionados aleatoriamente de entre os que vivem numa determinada reserva natural. Entre as variáveis observadas estão o perímetro do tórax (X, em cm) e o peso (Y, em kg), antes da hibernação.

a) A análise descritiva da variável estatística marginal Y conduziu, entre outros, aos resultados que se apresentam no quadro seguinte, fornecido pelo *software* estatístico SPSS.

Descriptives

		Statistic
Peso	Mean	162,37
	Median	153,77
	Std. Deviation	44,749
	Minimum	102
	Maximum	264

(i) Como interpreta o valor 153.77 que figura no quadro?

(ii) Determine um intervalo real que contenha, com uma confiança de 95%, o verdadeiro valor médio do peso dos ursos daquela reserva natural antes da hibernação.

b) Foi analisada, por meio do *software* estatístico SPSS, a existência de uma relação linear que exprima Y como função de X. Este *software* forneceu o valor 0.958 para o coeficiente de correlação da amostra. Apresentam-se a seguir mais alguns dos resultados obtidos.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B
1	(Constant)	-52,155
	Perímetro do tórax	1,758

a. Dependent Variable: Peso

(i) Determine o perímetro médio do tórax dos ursos observados.

(ii) Considera legítimo usar uma relação linear para descrever o peso em função do perímetro do tórax?

(iii) Obtenha uma estimativa do peso de um urso com 120 cm de perímetro do tórax.

v.p.f.

3. O tempo de vida de certo tipo de componentes electrónicas fabricadas por determinado processo é descrito por uma v.a.r. X de lei $L(\theta, 3)$, absolutamente contínua, de densidade

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\, e^{\frac{1}{\theta}(3-x)}\, \mathbb{I}_{]3,+\infty[}(x),$$

onde θ é um parâmetro real positivo, desconhecido. Nestas condições, as referidas componentes têm um tempo de vida médio de $(3+\theta)$ $u.t.$ (unidades de tempo) com desvio padrão de θ $u.t.$. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n de X.

Considere as estatísticas $T_n = n\left(\min\limits_{1\le i\le n} X_i - 3\right)$ e $Z_n = \overline{X}_n - 3$.

a) Verifique que a v.a.r. $X_{1:n} = \min\limits_{1\le i\le n} X_i$ segue a lei $L(\frac{\theta}{n}, 3)$.

b) Prove que T_n e Z_n são estimadores cêntricos de θ.

c) Compare os estimadores T_n e Z_n de θ, relativamente à função de perda quadrática.

d) Verifique que o método dos momentos e o método da máxima verosimilhança conduzem ao mesmo estimador do parâmetro θ.

4. O tempo, expresso em minutos, que um laboratório de análises leva a executar determinada tarefa é bem descrito por uma distribuição normal de valor médio m e desvio padrão σ, $m > 0$ e $\sigma > 0$. Com o objectivo de diminuir o tempo médio de execução dessa tarefa, que anteriormente era de 16 *min*, está a ser testado um novo equipamento. Foram registados, ao acaso, 25 valores do tempo de execução com este equipamento aos quais corresponde um tempo médio de 15.3 *min* e um desvio padrão corrigido de 0.934 *min*.

Pretende-se testar a hipótese $H_0 : m = 16$ contra a alternativa $H_1 : m < 16$.

a) Admitindo σ conhecido e igual a 1, a que decisão conduz a amostra observada, ao nível de significância 0.05?

b) Suponha agora que σ é desconhecido. Nestas condições, para testar as hipóteses indicadas considera-se o teste de região crítica

$$\mathcal{C} = \left\{(x_1, \ldots, x_{25}) \in \mathbb{R}^{25} : \ \frac{\overline{x}_{25} - 16}{\widehat{s}_{25}} < c\right\},$$

onde c é uma constante real. A amostra observada permite concluir que o novo equipamento reduz efectivamente o tempo médio de execução da tarefa?