

Duração: 1h 30min

15-12-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. O volume dos depósitos mensais (em dezenas de milhar de euros) efectuados por pequenas e médias empresas numa determinada instituição bancária é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo uma lei de Pareto, $Par(\theta, 3)$, isto é, uma lei absolutamente contínua com função densidade

$$f_{\theta}(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{I}_{[\theta, +\infty[}(x),$$

onde θ é um parâmetro real positivo desconhecido. Sejam (X_1, \dots, X_n) uma amostra aleatória de dimensão n de X , $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $T_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

- Prove que T_n é o estimador da máxima verosimilhança de θ .
- Mostre que o estimador dos momentos de θ é $U_n = \frac{2}{3} \bar{X}_n$ e conclua que se trata de um estimador cêntrico.
- Sabendo que o risco quadrático do estimador T_n é dado por $R(T_n, \theta) = \frac{2\theta^2}{(3n-1)(3n-2)}$, compare os estimadores T_n e U_n .
- Conclua que T_n converge em média quadrática para θ .
- Determine a lei limite da v.a.r. $Z_n = 2\sqrt{\frac{n}{3}} \left(\frac{\bar{X}_n}{\theta} - \frac{3}{2} \right)$.
- Uma amostra de X de dimensão 200 conduziu aos resultados apresentados na tabela que se segue, fornecida pelo *software* estatístico SPSS.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Volume de depósitos	200	2,00	9,79	2,82	1,09

- Indique estimativas da máxima verosimilhança e dos momentos do parâmetro θ .
 - Com base nesta amostra, determine um intervalo de confiança para o valor médio de X , com grau de confiança 0.95.
2. O tempo, expresso em minutos, necessário para percorrer em hora de ponta uma via de determinada cidade pode ser representado por uma v.a.r. normalmente distribuída de média m desconhecida, $m \in \mathbb{R}^+$, e de desvio padrão 2.
- Segundo estudos anteriormente realizados, o tempo médio necessário para percorrer aquela via em hora de ponta é de 15 minutos. No entanto, as entidades competentes afirmam que, nas condições actuais, aquele tempo médio aumentou o que, a verificar-se, conduzirá à construção de uma segunda faixa de rodagem. Decidem assim registar, durante 25 dias (escolhidos ao acaso), o tempo necessário para percorrer a via naquele horário, tendo sido obtido um tempo médio de 16 minutos.
- Com base na amostra observada e ao nível de significância 0.05, qual a decisão que as referidas entidades deverão tomar?
 - Sem efectuar cálculos, indique qual a decisão a tomar se se considerar um nível de significância superior a 0.05.