

**Teste de Estatística****Duração:** 45m

30-04-07

**Observação:** A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

O tempo (em minutos) compreendido entre duas chegadas consecutivas, de doentes com problemas cardiovasculares graves, ao Serviço de Urgência de certo Hospital é bem descrito por uma v.a.r.  $X$  seguindo uma lei exponencial de valor médio  $\theta$  ( $\theta \in ]0, +\infty[$  desconhecido). Com o objectivo de estimar  $\theta$ , considere uma amostra aleatória de dimensão  $n$  de  $X$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Determine um estimador da máxima verosimilhança,  $T_n$ , de  $\theta$  e calcule a sua variância.
2. Que pode afirmar quanto à centricidade e convergência do estimador,  $T_n$ , de  $\theta$ ?
3. Mostre que a v.a.r.  $Y_n = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$  segue a lei  $\chi_{2n}^2$ .
4. Será  $Y_n$  uma variável fulcral que lhe permita construir um intervalo de confiança para  $\theta$ ? Justifique convenientemente a sua resposta.
5. Suponha que foram efectuadas 20 observações aleatórias daqueles tempos,  $x_1, \dots, x_{20}$ , cuja média,  $\bar{x}_{20}$ , é de 45,3 minutos. Determine, com uma confiança de 98%, uma estimativa intervalar para  $\theta$ .