Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra

Departamento de Matemática

Aula de Polinómios

Ensino da Matemática I

Professora: Helena Albuquerque (lena@mat.uc.pt)

Autor:
Tânia Isabel Duarte Lopes

27 de Janeiro de 2012

Conteúdo

1 Definições e exemplos

1.1 Definição de polinómio

Um polinómio é uma soma algébrica em que a variável x não aparece no denominador.

Exemplo:

$$4x^5 + 3x^3 + \frac{2}{5}x - 34$$

1.2 Definição de monómio

Um monómio é cada uma das parcelas que constitui a soma, ou seja, é um número ou um produto de números, alguns deles podem ser representados por letras e assim podem tomar quaisquer valores (a isto chama-se variável).

Exemplo: O polinómio,

$$x^5 + 3x^3 + \frac{2}{5}x - 34$$

têm 4 monómios.

1.3 Definição de binómio

Um binómio é um polinómio com dois monómios.

Exemplo:

$$x^5 + 34$$

1.4 Definição de trinómio

Um trinómio é um polinómio com três monómios.

Exemplo:

$$3x^3 + \frac{2}{5}x - 34$$

1.5 Definição de Monómios Semelhantes

Chamam-se monómios semelhantes aos monómios que têm a mesma parte literal, ou seja,

- $2x^2$, $\frac{5}{8}x^2$, $-6x^2$ são monómios semelhantes de parte literal x^2;
- $-\frac{1}{2}x$, $5x$, $-82x$ são monómios semelhantes de parte literal x;
- -4, $\frac{3}{2}$, 6, $-\frac{2}{5}$ são monómios semelhantes de parte literal chamados termos independentes.

2 Operações de Polinómios

- Adição;
- Subtracção;
- Multiplicação;
- Divisão (abordada mais tarde).

2.1 Adição

A soma de dois polinómios é o polinómio que se obtém ligando os dois polinómios pelo sinal de adição.

Exemplo:
A soma dos polinómios, $x^4 + 2x^2 - 5x - 3$ e $-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

$$(x^4 + 2x^2 - 5x - 3) + (-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2) = -x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x - 5$$

2.2 Subtracção

A diferença de dois polinómios é o polinómio que se obtém ligando-os pelo sinal de subtracção, aqui deve-se colocar correctamente os parêntesis.

Exemplo:
A diferença dos polinómios, $x^4 + 2x^2 - 5x - 3$ e $-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

$$(x^4 + 2x^2 - 5x - 3) - (-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2) = 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 9x - 1$$

2.3 Multiplicação

O produto de dois polinómios é o polinómio que se obtém ligando-os pelo sinal de multiplicação.

Aqui temos três casos:

- Multiplicação de dois monómios;

- Multiplicação de um monómio por um polinómio;
- Multiplicação de dois polinómios.

Caso 1: Multiplicação de dois monómios

Exemplo: A multiplicação de $-3x^2$ com $2x$ é,

$$(-3x^2) * (2x) = -6x^3$$

Em geral,

$$(ax^{\alpha}) * (bx^{\beta}) = abx^{\alpha+\beta}$$

Caso 2: Multiplicação de um monómio com um polinómio

Exemplo:

A multiplicação de $-3x^2$ com $2x + 1$ é,

$$(-3x^2) * (2x + 1) = -6x^3 - 3x^2$$

.

Em geral,

$$(ax^{\alpha}) * (bx^{\beta} + cx^{\gamma}) = abx^{\alpha+\beta} + acx^{\alpha+\gamma}$$

Caso 3: Multiplicação de dois polinómios

Exemplo:

A multiplicação de $-3x^2 - 2x - 3$ com $2x + 1$ é,

$$(-3x^2 - 2x - 3) * (2x + 1) = -6x^3 - 3x^2 - 4x^2 - 2x - 6x - 3 =$$

$$= -6x^3 - 7x^2 - 8x - 3$$

Em geral,

$$(a_0x^n + ... + a_{n-1}x + a_n) * (b_0x^m + ... + b_{m-1}x + b_m) =$$

$$= (a_0x^n) * (b_0x^m + ... + b_{m-1}x + b_m) +$$

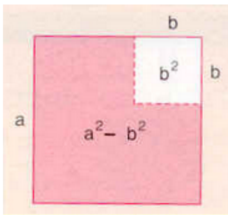
$$+ ... + (a_{n-1}x) * (b_0x^m + ... + b_{m-1}x + b_m) + a_n * (b_0x^m + ... + b_{m-1}x + b_m)$$

3 Casos notáveis da multiplicação de polinómios

Na multiplicação de dois polinómios aplica-se, normalmente, a propriedade distributiva. No entanto, há produtos de polinómios que é possível calcular de uma forma mais rápida. Há dois casos:

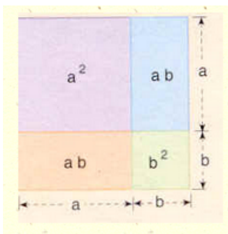
- Quadrado de um binómio;
- Diferença de quadrados.

3.1 Primeiro caso:Diferença de quadrados



$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

3.2 Segundo caso: Quadrado de um binómio



$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Generalizando... O quadrado de um binómio é o polinómio cujos termos são: o quadrado do 1^o monómio, o dobro do produto do 1^o monómio pelo 2^o e o quadrado do 2^o monómio, ou seja,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

4 Decomposição

4.1 Forma 1) Pondo em evidência factores comuns

Exemplo:

$$3x^3 + 9x^2 - 12x + 15 = 3(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)$$

Aplicou-se a propriedade distributiva no sentido inverso do que é habitual: $a * b + a * c = a * (b + c)$.
Chama-se a este procedimento pôr em evidência os factores comuns aos vários termos do polinómio.

4.2 Forma 2) Utilizando os casos notáveis da multiplicação

Recorda (casos notáveis):

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Exemplo:
a)$(2a-3)^2$
b)$\left(2y + \frac{1}{5}\right)^2$
c)$\left(b - \frac{1}{5}\right)\left(b + \frac{1}{5}\right)$

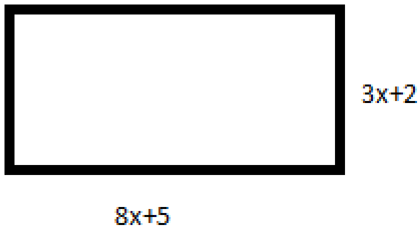
4.3 Forma 3) Utilizando os dois processos anteriores

Exemplo:
a)$\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)\left(-\frac{1}{2}x - 3\right) - 3\left(-x - \frac{1}{2}\right)^2$
b)$\left(2 - \frac{1}{2}x\right)\left(2 + \frac{1}{2}x\right) - 2\left(x - 3\right)^2$

5 Exercícios

5.1 Exercício 1

Qual é o perímetro do retângulo, sabendo que as medidas dos lados é dado pelas expressões abaixo da figura?



5.2 Exercício 2

Efetue e simplifique.

a) $(2-x)^2-(4-x)(4+x)$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)$

c) $(a+3)(b+5)$

d) $2(3x+1)^2(2x-3)(2x+1)$

5.3 Exercício 3

Considere as expressões $-2a$, $2a+2b$, $\frac{3}{2}a^2$ e $2+a-b$.

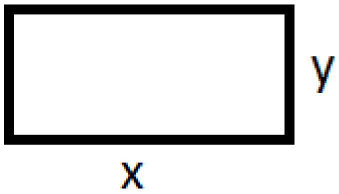
a) Das expressões dadas indique as que são monómios.

b) Das expressões dadas indique as que são polinómios e não são monómios.

c) Calcule o valor de cada uma das expressões para:

i) $a=-1$ e $b=\frac{1}{2}$

ii) $a=-\frac{1}{3}$ e $b=-2$



5.4 Exercício 4

A figura representa um retângulo.

a) Escreva uma expressão que represente:

i) o perímetro do retângulo;

ii) a área do retângulo.

b) Calcule a área e o perímetro do retângulo para $a = \frac{7}{2}$ e $b = 2$

5.5 Exercício 5

Simplifique cada uma das expressões:

a) $2(a+3)+2(a-5)$

b) $3(1-2a)-(-2a+5)$

c) $-a+3(-2a+5)-1$

d) $1-(-a+2)-3(a-4)$

e) $-2(a-3)-3(a+1)-(-a)$

f) $-(s+3)-2(s+5)+(-s-2)$

g) $(x-3)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)$

h) $-(1-x)-\left(3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

i) $\frac{x}{2}-3x+\frac{1}{4}-x+1$

j) $-\left(-\frac{1}{2}x-3\right)-2\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}$

6 Bibliografia

Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Neves, Armando; Matemática - 2 Parte, 8ano, Porto Editora, 1a Edição, 2008