TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

Mestrado em Ensino da Matemática

Ensino da Matemática II

NÚMEROS COMPLEXOS

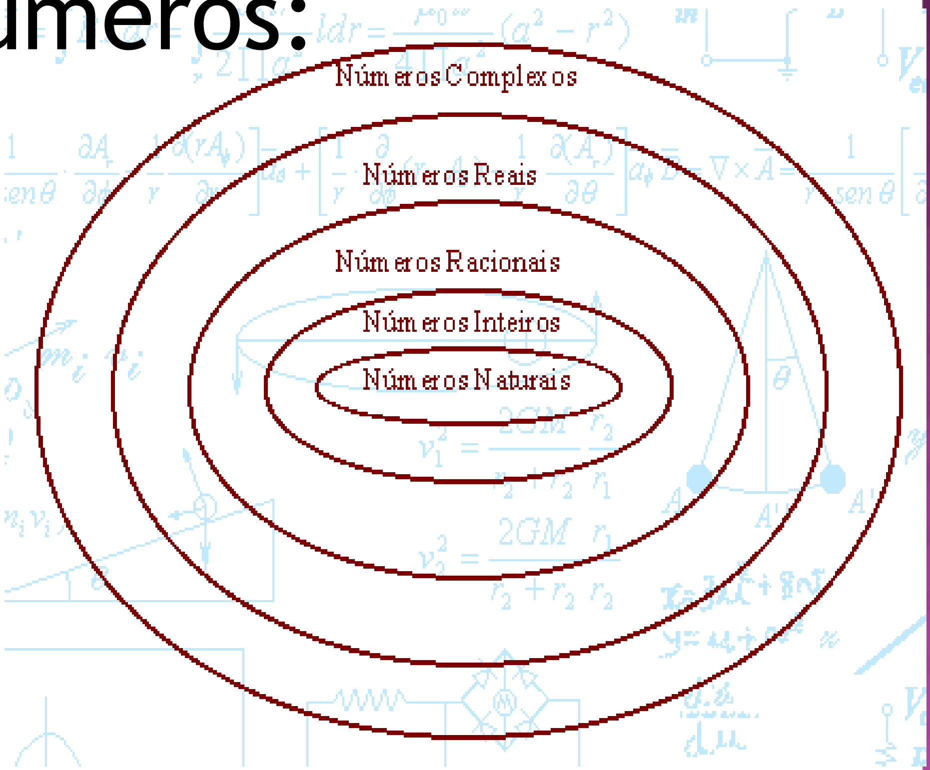
$$i = \sqrt{-1}$$

EVOLUÇÃO DA HISTÓRIA...

- Conceito de números:
  - Naturais;
  - Inteiros;
  - Racionais;
  - Reais;

E agora,

- Complexos.



- ~~Equações de~~ 2º grau Equações do 3º grau

- No século XVI, em Itália, havia um grupo de matemáticos brilhantes, mestres da famosa Universidade de Bolonha, que descobriram a fórmula resolvente para equações de 3º grau;

- Scipione del Ferro e Tartaglia, de Bolonha, e Cardano, de Milão, estão ligados à descoberta da fórmula,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(Fórmula de Tartaglia)

- Solução da equação,

$$x^3 + px + q = 0.$$

- Os **números complexos** são também conhecidos como **números imaginários**;

- Começa-se por admitir que existe um número que elevado ao quadrado é igual a -1.

- A esse número, chamada **unidade imaginária** é representado pela letra **i**, ou seja,

$$\boxed{i^2 = -1}$$

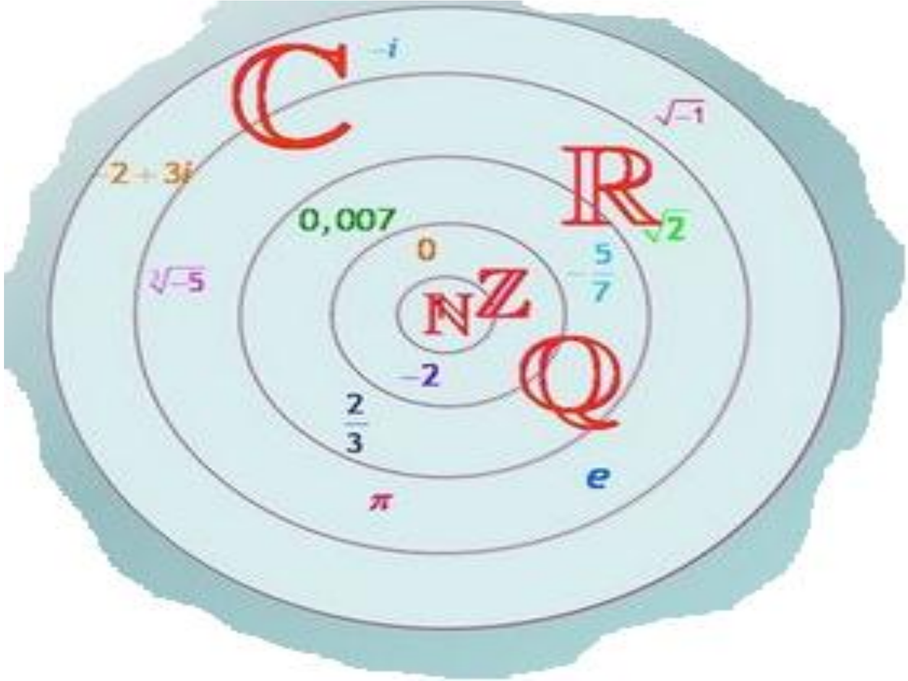
- Como $(-i)^2 = -1$, o -1 tem duas raízes quadradas, o i e o –i.

DEFINIÇÃO DE COMPLEXO:

- Um **número complexo** é todo o número que se pode escrever na forma,

$$a + bi$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $i^2 = -1$.



EXERCÍCIO:

- A partir de $i^2 = -1$.
  - Calcule:
    - i^3 ;
    - i^4;
    - i^7;
    - i^6;
    - i^{10};
    - i^{96};
    - i^{105}.
  - Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcule:
    - i^{4n};
    - i^{4n+1};
    - i^{4n+2};
    - i^{4n+3}.

NOVOS SÍMBOLOS. NOVOS TERMOS

- A representação de um complexo z pela expressão $x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, diz-se a forma algébrica ou representação algébrica do número z.

Parte Real
X=Re(z)

$$z = x + \overbrace{yi}^{\text{Parte Imaginária}}$$

Coeficiente da Parte Imaginária
Y=Im(z)

EXERCÍCIO:

- Indique Re(z) e Im(z) em cada um dos casos seguintes:
  - $z = -5i + 2;$
  - $z = 3i;$
  - $z = -2;$
  - $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{3}.$

CASOS PARTICULARES:

Se $x = 0 \wedge y \neq 0$, o número complexo $z = 0 + yi$ diz-se **imaginário puro** e identifica-se com yi;

Se y $= 0$, então $z = x + 0i$ diz-se **real** e identifica-se com x.

RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS REAIS NEGATIVOS:

- No conjunto dos complexos, todo o número real negativo *k* tem duas raízes quadradas,

$$\sqrt{-k}\, i \text{ e } -\sqrt{-k}\, i$$

EXEMPLOS:

- k = -5; $\sqrt{5}\, i$ e $-\sqrt{5}\, i$
- K = -100; $10i$ e $-10i$

PROPRIEDADES DOS COMPLEXOS:

Igualdade: Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ dizem-se iguais se têm as partes reais iguais e os coeficientes das partes imaginárias também iguais.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d$$

Conjugados: Dois números complexos que têm as partes reais iguais e os coeficientes das partes imaginárias simétricos, dizem-se números complexos **conjugados**.

Os números complexos $a + bi$ e $a - bi$ são conjugados.

Simétricos: Dois números complexos que têm as partes reais e os coeficientes das partes imaginárias simétricos, dizem-se números complexos **simétricos**.

Os números complexos $a + bi$ e $-a - bi$ são simétricos.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO:

Definição:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

para todos os complexos $(a + bi)$ e $(c + di)$.

- Comutativa;

  z + w = w + z

- Associativa;

  (z + w) + v = z + (w + v)

- Elemento Neutro;

  z + 0 = z =0 + z

- Elementos Opostos.

  z + (- z) = 0

OUTRAS OPERAÇÕES:

Subtração:

Definição:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

para todos os complexos $(a + bi)$ e $(c + di)$.

Multiplicação:

Definição:

$$(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

para todos os complexos $(a + bi)$ e $(c + di)$.

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO:

- Comutativa

$$z * w = w * z$$

- Associativa

$$(z * w) * v = z * (w * v)$$

- Elemento Neutro

$$z * 1 = z = 1 * z$$

- Elementos Opostos

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ \exists w \in \mathbb{C} : z * w = w * z = 1$$

- Distributiva em relação à adição

$$z * (w + v) = z * w + z * v$$

EXERCÍCIO:

- Efetue e apresente o resultado na forma $\boldsymbol{a+bi}$:
  - $(5-2i)+\ (7+3i)$;
  - $(2-3i)-\ (4+5i)$;
  - $(-1+4i)-\ (-6+i)$.

- Efetue:
  - $3i(2+4i)$;
  - $(3+2i)(-5-i)$;
  - $(2-3i)^2$.

POTENCIAÇÃO:

As potências de expoente natural e as potências de expoente inteiro negativo são definidas como em $\mathbb{R}$.

Para $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$,

- $(a+bi)^n = \underbrace{(a+bi) * \ldots * (a+bi)}_{\text{n factores}}$

- $(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}$, com $a+bi \neq 0$

SOMA E PRODUTO DE NÚMEROS COMPLEXOS CONJUGADOS:

A soma e o produto de dois números complexos conjugados são números reais. Se $z = a + bi$, tem-se:

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z * \bar{z} = a^2 + b^2$$

EXERCÍCIO:

- Indique o conjugado de cada um dos seguintes números complexos:
  - $Z = 3 - 2i;$
  - $\mathrm{Z} = \ 4 + 2i;$
  - $\mathrm{Z} = \ -3i;$
  - $Z = \frac{1}{2}.$

DIVISÃO:

Definição:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c + di \neq 0$, tem-se:

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

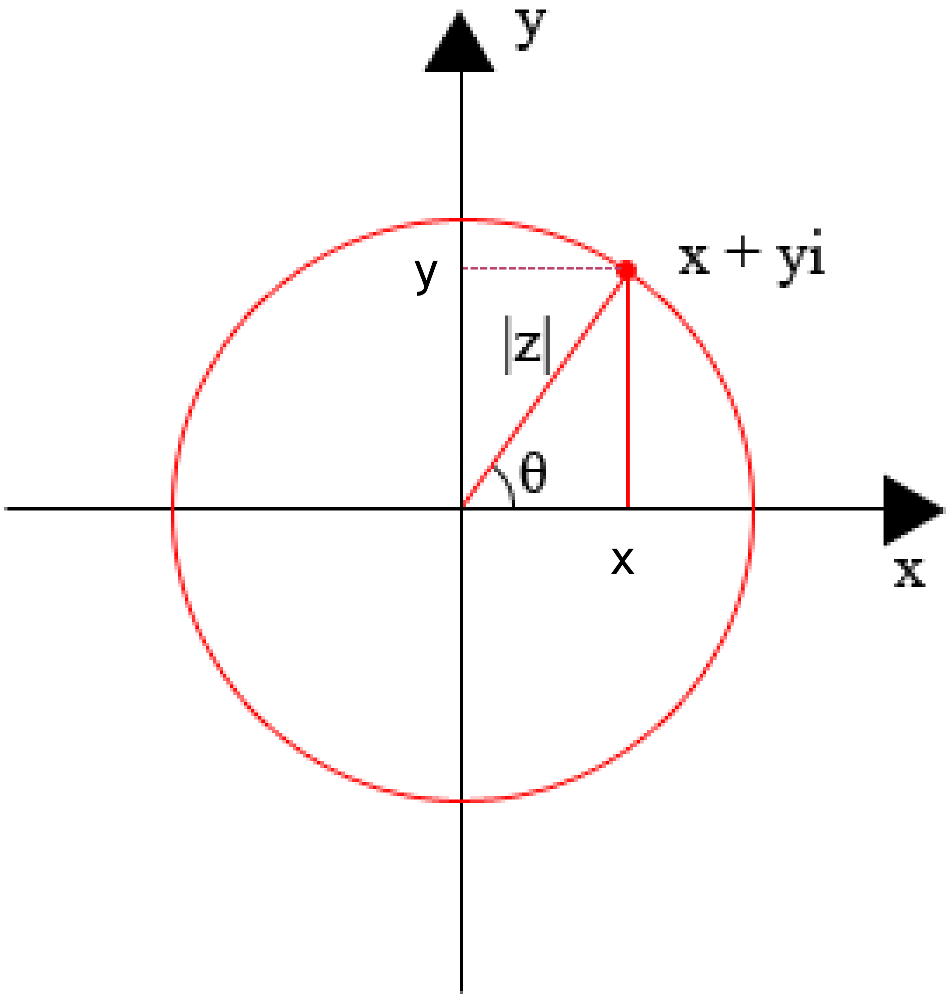
- **Plano d'Argand**

$\mathbb{C}$ é um conjunto de todas as expressões na forma $a+bi$ com a,b reais. Logo, a cada complexo, $a+bi$ corresponde um e um só par ordenado (a,b) elemento de $\mathbb{R} * \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, e vice-versa,

$$a+bi \in \mathbb{C} \rightleftarrows (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

o que estabelece uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$.

PLANO D'ARGAND



EXERCÍCIO:

- Represente, no plano complexo, as imagens dos complexos:
  - $1 + 3i$;
  - $\frac{9}{2} + i$;
  - $-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$;
  - $-3 + \frac{7}{2}i$;
  - $-1 + 2i$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Lima, Yolanda; Gomes, Francelino; XeqMat – Matemática – 12ºano, Editorial o Livro;

- Jorge, Ana Maria Brito; Alves, Conceição Barroso; Fonseca, Graziela; Barbedo, Judite; Infinito 12A – Parte 3, Areal Editores;

- Soveral, Ana Arede; Silva, Carmen Viegas; Matemática A – Volume 3, Texto Editores;