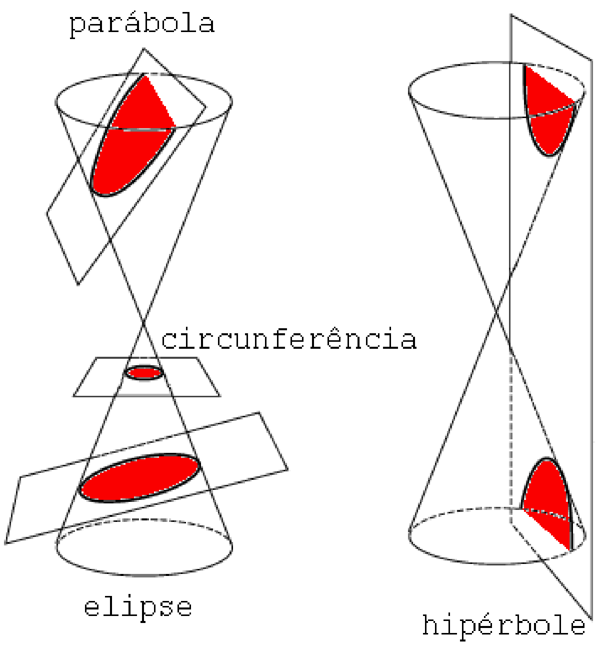
FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

As Cónicas no Universo



Actividades Matemáticas

Professora : Maria Celeste de Almeida Gouveia

Trabalho elaborado por:

Alexandra Resende

Andreia Videira

Diogo Silva

Tânia Lopes

2011/2012

Conteúdo

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho foi realizado no âmbito da cadeira Actividades Matemáticas com o objectivo de promover os conteúdos programáticos sobre a medição do Universo com telescópios, falando um pouco do seu desenvolvimento ao longo dos anos e mostrando que a astronomia e a matemática estão bastante interligadas. Assim, facilmente se chega às secções cónicas (elipses, parábolas e hipérboles) que encontramos em vários locais no nosso dia-a-dia. Achamos importante que os alunos encontrem a matemática na natureza que nos rodeia e que por vezes nos parece despercebida.

O estudo das parábolas e das elipses (não obrigatório) e o estudo das hipérboles faz parte do conteúdo programático, respectivamente, dos 10º e 11º anos.

Para promover estes conteúdos matemáticos expositivamente, criámos actividades lúdicas para que a recepção por parte dos alunos seja facilitada e realizada da forma mais atractiva possível. Recorremos também às novas tecnologias (com o uso do software GeoGebra) para realizarmos algumas actividades.

1. BREVE HISTÓRIA DAS CÓNICAS

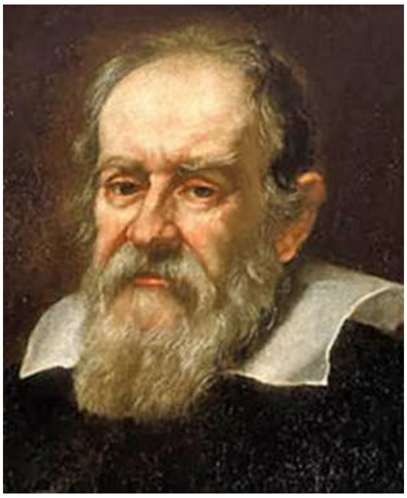
MEDINDO O UNIVERSO COM TELESCÓPIOS

A ciência moderna floresceu no século XVII com o trabalho de três dos mais conhecidos e importantes cientistas da História: Galileu Galilei (1564 – 1642), Johannes Kepler (1571 – 1630) e Isaac Newton (1642 – 1727). Esta ‘nova ciência’ tem algumas características que a diferenciam completamente da ciência Aristotélica que vigorou nos séculos anteriores, desde a Grécia Antiga, durante a Idade Média e até ao início do Renascimento. Entre essas características destaca-se o facto de ser uma ciência experimental de carácter quantitativo e de ser dotada de teoria matemática. O carácter quantitativo surge em oposição às explicações qualitativas que eram dadas para os fenómenos observados pelos antigos teóricos. A exemplo disso, a ciência moderna pretendia explicar como uma maçã caía e não porque ela caía, procurando descrições matemáticas para os eventos observados.

A teoria matemática viria a ter maior incidência no trabalho de Newton. A sua utilidade prende-se com a possibilidade de fazer previsões e explicar uma grande variedade de fenómenos. Espelho dessa característica é o facto de Newton ter combinado as leis observadas para movimentos planetários com as leis da mecânica que aparentavam governar os fenómenos terrestres.

DA GRÉCIA A GALILEU

Foi em 1609 que Galileu começou o seu investimento na Astronomia depois de saber que um fabricante de lentes holandês tinha descoberto um método de atingir grandes ampliações, ao combinar duas lentes de uma forma especial, dentro dum longo tubo. Claramente, assiste-se neste momento à invenção do telescópio.



Como fiel discípulo da ciência experimental, Galileu procurou então construir o seu próprio telescópio. Começou por conseguir triplicar a ampliação conhecida e, depois de dominar problemas como o polimento das lentes e de experimentar diferentes arranjos das lentes no tubo, conseguiu atingir ampliações 33 vezes superiores às originalmente obtidas. Estes feitos, pelos moldes actuais, são modestos mas, na época, corresponderam a grandes evoluções no mundo da astronomia.

Com o seu novo engenho Galileu conseguiu observar as faces da Lua: tinha montes e vales e não era uma esfera perfeita como concebida pela teoria Aristotélica. Também observou manchas solares mostrando que também o Sol não era perfeito. Estas observações chocaram os seus contemporâneos pois contradiziam concepções existentes há séculos sobre a natureza do universo.

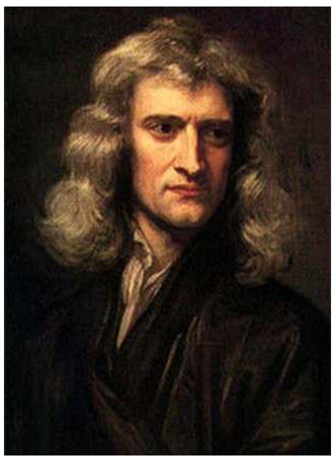
Essas concepções vinham já desde o tempo dos gregos Aristóteles e Ptolomeu que defendiam que a Terra era o centro imóvel do universo, o qual, por sua vez, era concebido como uma enorme esfera celestial que girava em torno da Terra e onde todas as estrelas estavam fixas. Ficou conhecida como a Teoria Geocêntrica e prevaleceu por quase dois milénios, tendo tido o apoio de quase todos os académicos, da Igreja Católica, da Igreja Luterana e dos líderes Judeus. Por estas razões as opiniões de Galileu foram consideradas heréticas.

Aristarco de Samos, no terceiro século a.C., tinha proposto a Teoria Heliocêntrica mas o seu trabalho foi ignorado. Segundo ele, o Sol era colocado no centro do universo. A sua teoria foi recuperada numa forma modificada 1800 anos depois por um jovem estudante polaco, Nicolau Copérnico, que argumentou que todos os planetas, incluindo o nosso, se moviam em esferas concêntricas (com ligeiras modificações) em torno do Sol.

Mesmo assim, proveio de Galileu o argumento mais devastador para os apoiantes da teoria geocêntrica: a descoberta de quatro luas orbitando Júpiter. Se Júpiter, um planeta, possuía luas, então a Terra deveria e poderia também ser considerada um planeta. Mais ainda, estas luas de Júpiter não orbitavam a Terra, o presumível centro do universo segundo os geocentristas.

MELHORANDO O TELESCÓPIO

Meio século depois de Galileu construir o seu primeiro telescópio, Newton recorreu ao seu génio para melhorar o instrumento. O de Galileu era um telescópio refractor que dobrava os raios luminosos por meio das lentes e tinha duas deficiências: o vidro usado para as lentes não era adequado, pois tinha de ser de alta qualidade e sem falhas para minimizar quaisquer distorções; a flexão dos raios luminosos separa as cores contidas na luz branca introduzindo uma distorção, chamada aberração cromática. O primeiro problema foi eliminado e o segundo reduzido usando um espelho em vez de uma lente.



Foi esta a ideia explorada por Newton, construindo um telescópio reflector com um espelho para captação de luz em vez da lente usual. Como estudante e admirador da geometria grega, Newton certamente sabia que a melhor forma para o espelho seria a forma parabólica, pelas suas propriedades particulares associadas aos seus vértices, eixo de simetria e foco. Em termos da ciência subjacente ao telescópio, um espelho parabólico permitiria que as linhas paralelas ao eixo, vistas como raios luminosos, ao embater na superfície côncava da parábola seriam redireccionados e acumulados no foco.

A dificuldade prendia-se com a construção do referido espelho parabólico. Como tal, em alternativa Newton usou um espelho esférico que acumularia os raios luminosos no centro da esfera. Mas, nesse caso o observador teria de estar colocado no centro da esfera o que bloquearia a entrada de luz. Assim sendo, o matemático britânico colocou o espelho esférico na base de um cilindro para reflectir os raios luminosos que entrassem para o foco. Para a observação colocou um pequeno espelho plano perto do foco , o qual reflectia a imagem para a parte lateral do telescópio.

Menos de quatro anos depois de Newton ter construído o seu telescópio, a academia francesa reportou que o cientista Cassegrain tinha conseguido conceber um espelho parabólico.

Pode-se assim considerar que o telescópio é a primeira aplicação tecnológica da propriedade focal das parábolas.

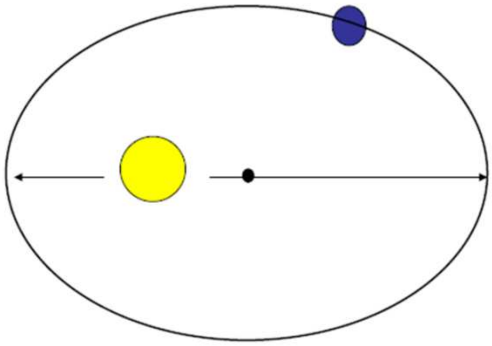
SECÇÕES CÓNICAS

As secções cónicas eram já conhecidas desde os tempos da Grécia Antiga.

Uma cónica é uma curva gerada pela intersecção de um plano com uma superfície cónica. Daí podem obter-se três tipos de secções cónicas não degeneradas: elipses, parábolas e hipérboles, cada qual com as suas propriedades particulares e de utilidade enorme na ciência moderna. Se o plano intersectar a superfície no seu vértice podem-se ter três situações para a curva de intersecção: um ponto, uma recta ou um par de rectas. Nesse caso diz-se que se obtêm secções cónicas degeneradas.

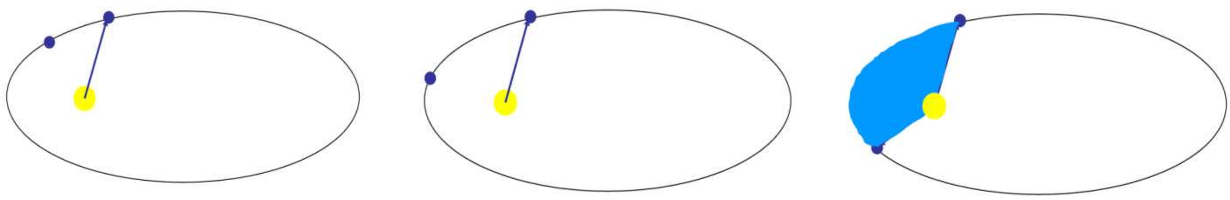
JOHANNES KEPLER

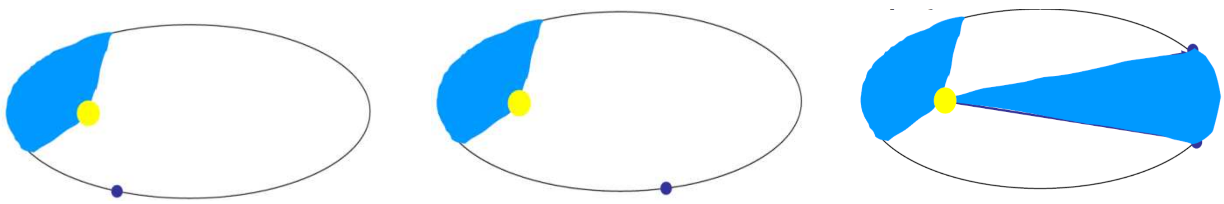
Kepler foi um brilhante matemático. No contexto desta discussão importa realçar que este matemático desenvolveu uma teoria mística para a composição e estrutura do sistema solar relacionando os seis planetas conhecidos com os cinco sólidos platónicos. Para tal precisou de dados astronómicos rigorosos. O astrónomo Tycho Brahe possuía esses dados pois passou 20 anos a fazer registos extremamente rigorosos das posições planetárias e das posições de 1000 estrelas. Kepler tornou-se seu assistente e, ao trabalhar numa questão matemática relacionada com as observações de Tycho, viria a determinar as hoje conhecidas Leis de Kepler.



A primeira lei é conhecida como a *"lei das trajectórias elípticas"* e diz que a órbita de cada planeta é uma elipse com o sol no seu foco.

A *"lei das áreas"* é o nome comummente atribuído à segunda lei de Kepler que define que, durante cada intervalo de tempo, o segmento de recta que une o sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais em qualquer lugar da sua órbita elíptica.





Por fim, a "*lei do tempo*": o quociente do quadrado do período orbital pelo cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica é constante.

Planeta	P (anos)	a (UA)
Mercúrio	0.24085	0.387099
Vénus	0.61519	0.723326
Terra	1.0000	1.000018
Marte	1.8807	1.523638
Júpiter	11.861	5.20248
Saturno	29.570	9.56329
Urano	84.746	19.2937
Neptuno	166.57	30.2743

P^2/a^3
1.000063
1.000038
0.999946
0.999985
0.999106
0.999725
0.999981
0.999934

Mais uma vez as secções cónicas desempenharam um papel fundamental na evolução da ciência, contribuindo decisivamente para o estuda da física, astronomia, arquitectura e engenharia. A elipse, por exemplo, tem muitas outras aplicações destacando-se a propriedade acústica usada muito frequentemente em museus e galerias.

2. O QUE É UMA CÓNICA

Em geometria, as **cónicas** são as curvas geradas pela intersecção de um plano com uma superfície cónica.

1. **Elipse** - é a cónica definida pela intersecção de um plano com apenas um dos ramos da superfície cónica, não sendo o plano paralelo à geratriz.

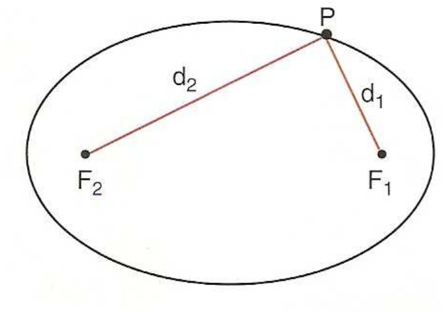
2. **Parábola-** é a cónica definida pela intersecção de um plano com apenas um dos ramos da superfície cónica, sendo o plano paralelo à geratriz.

3. **Hipérbole-** é a cónica definida pela intersecção de um plano com uma superfície cónica, sendo o plano paralelo ao seu eixo.

Quando o plano secante é perpendicular ao eixo da superfície, a curva de intersecção é uma **circunferência**.

3. Elipses

A elipse é uma secção de uma superfície cónica de revolução por um plano que corta todas as geratrizes, ou seja, é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que é constante a soma das duas distâncias a dois pontos fixos, desse plano, chamados focos. Tal constante tem de ser superior à distância entre os focos.



Por definição, $d_1 + d_2 = constante$, F_1 e F_2 são os focos. F_1F_2 é a distância focal. $[PF_1]$ e $[PF_2]$ são raios focais.

Estudo analítico:

Para fazer o estudo analítico de uma elipse adopta-se um referencial ortogonal x0y tendo, por exemplo:

- A origem no ponto médio de $[F_2F_1]$
- O eixo das abcissas coincidente com F_2F_1 (orientado de F_2 para F_1)

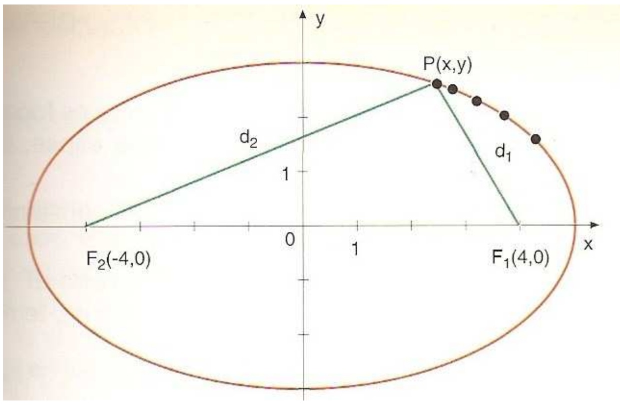
Problema:

Caso particular:

$\overline{F_2F_1} = 8$ (na unidade de comprimento adoptada) e $d_1 + d_2 = 10$.

Sendo P(x,y) um ponto genérico da elipse, tem-se $F_1 = (4,0)$ e $F_2 = (-4,0)$, de onde:

$d_1 = \overline{PF_1} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ e $d_2 = \overline{PF_2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$



Como temos $d_1 + d_2 = 10$, então

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

sendo esta uma equação cartesiana da elipse.

Isolando um radical e quadrando vem,

$$\left(\sqrt{(x+4)^2 + y^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2$$

que é equivalente a

$$(x+4)^2 + y^2 = 100 + (x-4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Desenvolvendo os quadrados, simplificando e isolando o radical que resta, temos

$$5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 25 - 4x$$

Quadrando novamente e simplificando, obtém-se

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

onde,

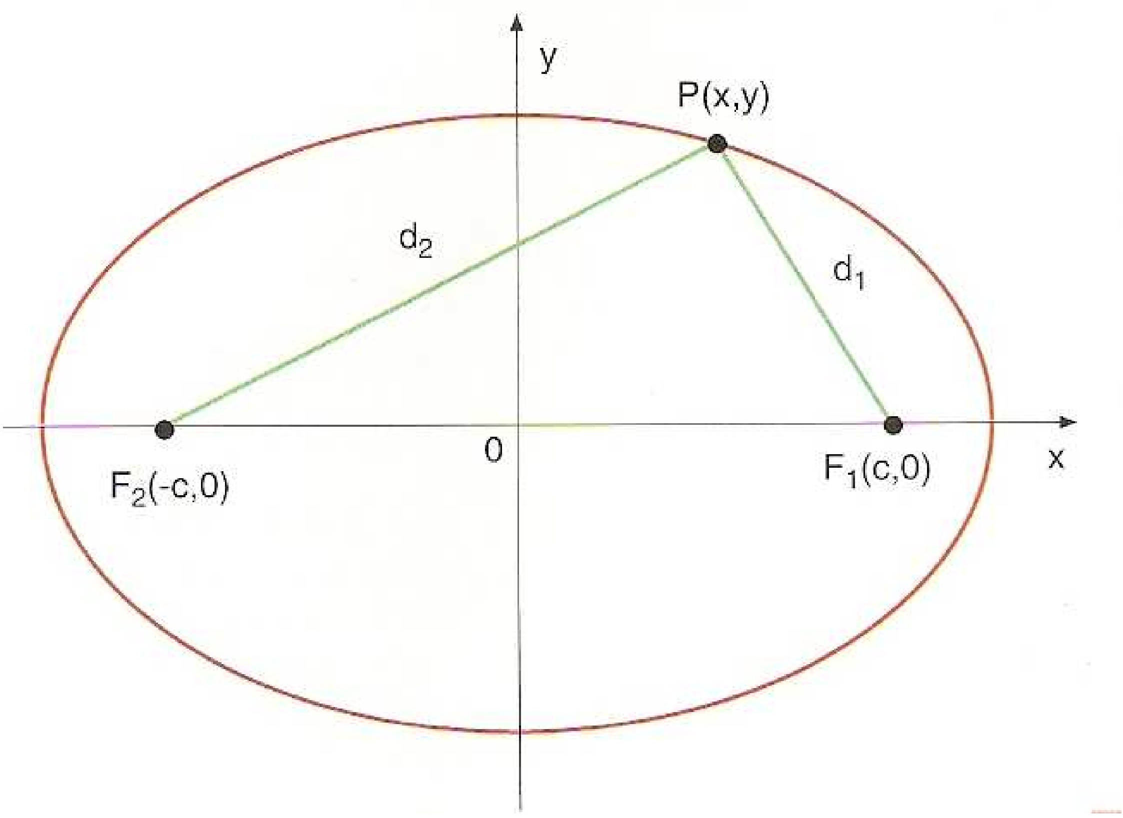
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação cartesiana da elipse na forma reduzida.

A máxima corda da elipse chama-se eixo maior (neste exemplo o eixo maior tem 10 unidades de comprimento).

À menor corda chama-se eixo menor que tem, neste caso, 6 unidades de comprimento.

Outro exemplo, mais geral,



Seja 2c a distância entre os focos. Sendo P um ponto da elipse, temos, por definição,

$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$ com a constante e $a > c$.

Escolhendo o referencial como se explicou no exemplo anterior, temos:

$F_1(c,0), F_2(-c,0), P(x,y)$

$d_1 = \overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ e $d_2 = \overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Logo, por definição: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

Isolando um radical e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos sucessivamente:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx \Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

Voltando a elevar ambos os membros ao quadrado:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$ podemos escrever

$a^2 - c^2 = b^2$ de onde resulta a equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo os dois membros por a^2b^2, obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \bigwedge b^2 = a^2 - c^2$$

que é a equação reduzida da elipse.

Das constantes positivas a, b, c podemos afirmar que:

1. $a > c$ pela definição de elipse
2. $a > b$ visto que $a^2 - c^2 = b^2$

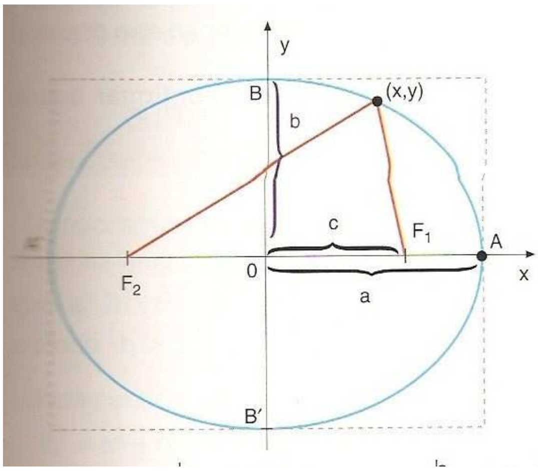
$a^2 = b^2 + c^2$, logo os três números podem ser medidas dos lados de um triângulo.

Discussão da equação reduzida de uma elipse

A equação reduzida é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- A curva correspondente terá de ser simétrica em relação ao eixo dos xx e em relação ao eixo dos yy, visto que as ordenadas figuram na equação elevadas a expoente par. Isto é, se um par (x, y) verifica a equação, também os pares $(x, -y), (-x, y)\ e\ (|x, -y)$ satisfazem a equação. Logo a curva é também simétrica em relação a 0.



Semi-eixo maior = a

Semi-eixo menor = b

Semi-distância focal = c

$a^2 = b^2 + c^2$

0 é o centro de simetria

A, A’, B, B’ vértices

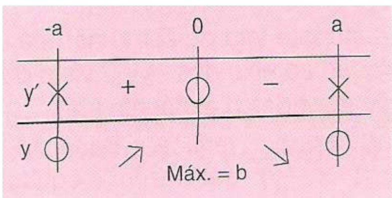
Temos $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \bigvee y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (a e b positivos)

- Na primeira equação os valores de y são sempre positivos, logo ela representa a parte da elipse acima do eixo das abcissas, na segunda equação os valores de y são negativos, logo a curva correspondente está abaixo do eixo dos xx. A elipse é a reunião dos gráficos destas duas funções.
- O domínio de qualquer das funções definidas por estas equações é dado por $x^2 \leq a^2$, ou seja, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

  Domínio = [-a,a] (a positivo)
- Para $x=\pm a$ vem $y=0$ em qualquer das equações, o que mostra que as duas partes da elipse passam em $(a,0)$ e $(-a,0)$. Como, além disso, as expressões $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ definem funções contínuas no seu domínio, conclui-se que a elipse é uma linha contínua e fechada cujo eixo maior (que contém os focos) mede 2a.
- A expressão $\sqrt{a^2-x^2}$ toma o máximo valor para $x=0$ de onde $y=b$ e $y=-b$ são, respectivamente, a máxima e a mínima ordenadas dos pontos da elipse. Vemos então que a elipse passa em $(0,b)$ e $(0,-b)$ e que o eixo menor da elipse mede 2b.

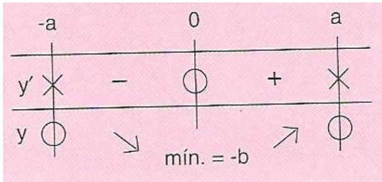
Estudo da monotonia:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};\ y'=\frac{b}{a}\times\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}};\ y''=-\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}<0$$



O que explica o traçado da parte da elipse <u>superior</u> ao eixo dos xx. Calculando a segunda derivada podemos afirmar que a concavidade está voltada para baixo.

Para $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, vem $y'=\frac{b}{a}\times\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. De onde,



o que explica o traçado da parte da elipse inferior ao eixo dos xx (o que é previsível por via da simetria).

Excentricidade

A excentricidade de uma elipse é o quociente da distância focal pelo eixo maior:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

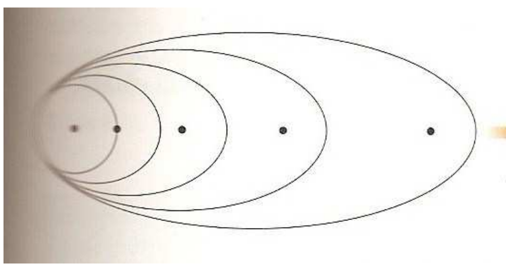
Por definição temos $c < a$, então a excentricidade é menor que 1.

Se o eixo maior da elipse for igual ao eixo menor, então a elipse é uma circunferência.

Nesse caso $a = b$ logo $c = 0$, ou seja, a distância focal é nula e os dois focos estão coincidentes com o centro da circunferência.

Numa circunferência, a excentricidade é nula visto que $\frac{c}{a} = 0$.

Quanto maior é a excentricidade de uma elipse (mais perto de 1), mais alongada é a curva e portanto mais se afasta da forma da circunferência:



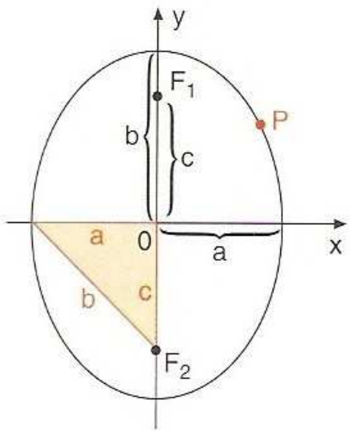
Quando $e \to 1$, a elipse tende para um segmento de recta com os focos nos extremos.

Outra forma de escolher o referencial:

Elipse com eixo maior vertical

Se colocarmos os focos sobre o eixo das coordenadas e o centro da elipse na origem, temos sucessivamente:

$\overline{F_1F_2} = 2c$; eixo maior igual a $2b$; $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$, sendo P um ponto qualquer de elipse e sendo $b > c$.



Neste caso tem-se

$b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2$

A excentricidade é dada por $e = \frac{c}{b} < 1$. A equação reduzida da elipse é

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (b > a)$

4. Parábolas

Definição do dicionário:

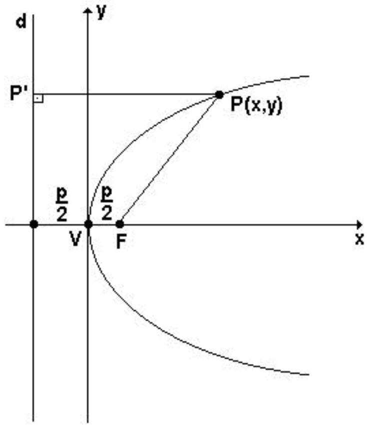
Curva plana, cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma recta fixa (directriz) ou curva resultante de uma secção feita num cone por um plano paralelo à geratriz.

Definição matemática:

Considere no plano cartesiano xOy, uma recta d (directriz) e um ponto fixo F (foco) pertencente ao eixo das abcissas (eixo dos x), conforme figura abaixo:

Denominaremos **PARÁBOLA**, à curva plana formada pelos pontos P(x,y) do plano cartesiano, tais que PF = Pd onde:

- PF = distância entre os pontos P e F
- PP' = distância entre o ponto P e a recta d (directriz).



Importante: Temos portanto, a seguinte relação notável: VF = p/2

<u>Equação reduzida da parábola de eixo horizontal e vértice na origem:</u>

Observando a figura acima, consideremos os pontos: F(p/2, 0) o foco da parábola, e P(x,y) - um ponto qualquer da parábola. Considerando-se a definição acima, deveremos ter: PF = PP'

Daí, vem, usando a fórmula da distância entre pontos do plano cartesiano:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}$$

Desenvolvendo convenientemente e simplificando a expressão acima, chegaremos à equação reduzida da parábola de eixo horizontal e vértice na origem, a saber:
$\mathbf{y^2 = 2px}$ onde p é a medida do ***parâmetro*** da parábola.

<u>Parábola de eixo horizontal e vértice no ponto (x_0, y_0)</u>:

Se o vértice da parábola não estiver na origem e, sim, num ponto (x_0, y_0), a equação acima fica:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

Parábola de eixo vertical e vértice na origem:

Não é difícil provar que, se a parábola tiver vértice na origem e eixo vertical, a sua equação reduzida será:

$$x^2 = 2py$$

Parábola de eixo vertical e vértice no ponto (x_0, y_0):

Analogamente, se o vértice da parábola não estiver na origem, e, sim, num ponto (x_0,y_0), a equação acima fica:

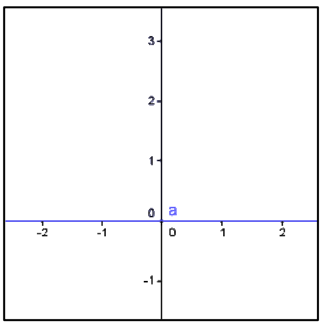
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

FUNÇÃO QUADRÁTICA:

Consideremos a função real de variável real f, definida por f(x)= x^2.

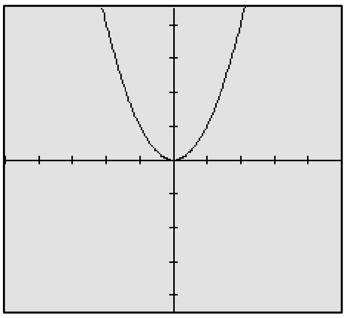
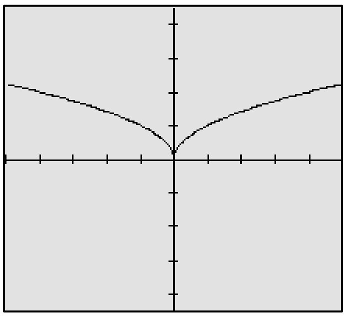
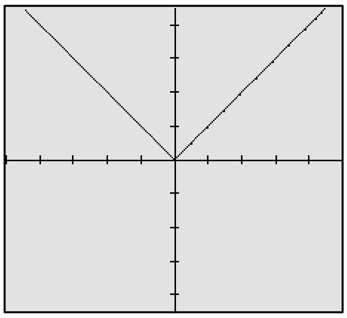
O domínio da função é R, já que qualquer número real tem quadrado.

Todo o número real tem imagem não negativa, isto é, f(x)≥0, para todo o x real , logo, a curva que representa a função f num referencial ortogonal encontra-se na zona colorida do plano, representado ao lado, e toca o eixo das abcissas na origem do referencial visto que 0^2=0, isto é f(0)=0. depois decorre que o contradomínio da função é R_0^+ e o mínimo da função é zero.



À curva que representa a função quadrática $f(x)=x^2$ chamamos parábola e o ponto (0,0) representa o vértice da parábola.

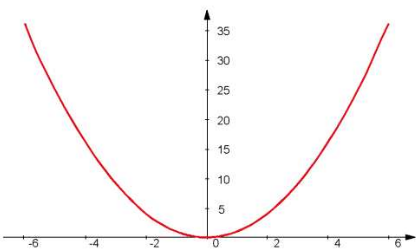
Como números simétricos têm o mesmo quadrado, podemos concluir que
$f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$, para todo o $x \in R$. diz-se por este motivo que esta função é uma função par. A nível gráfico vê-se que uma função é par quando o gráfico dessa mesma função é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (eixo yy).

Definição de função par:

Uma função f é denominada par quando $f(x)=f(-x)$, para todo x do Dom f.

Gráfico de uma parábola:



Observando o gráfico de $y = x^2$, concluímos ainda que:

- f é crescente no intervalo $[0, +\infty[$, ou seja, sendo a e b números reais positivos tais que $a < b$, então $a^2 < b^2$;
- f é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$, ou seja, sendo a e b números reais negativos tais que $a < b$, então $a^2 > b^2$;
- o gráfico desta função de domínio R é uma "linha contínua", o que nos sugere que é uma função contínua no seu domínio.

Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \in R\backslash\{0\}$:

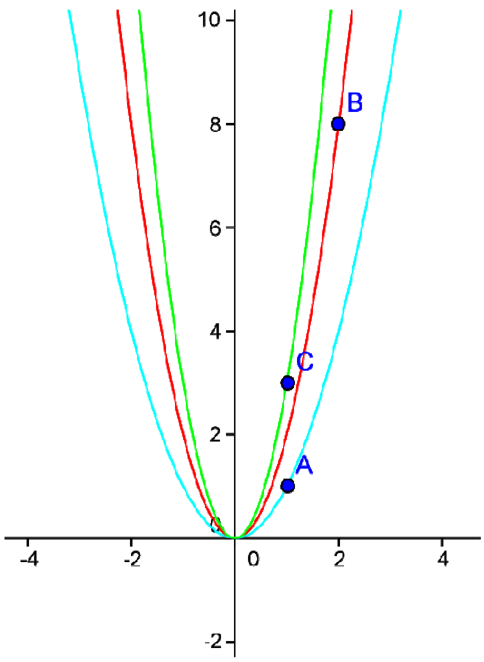
Podemos analisar várias parábolas para ver as diferenças entre elas.

Para $a \geq 1$ teremos por exemplo:

- $y = x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = 3x^2$

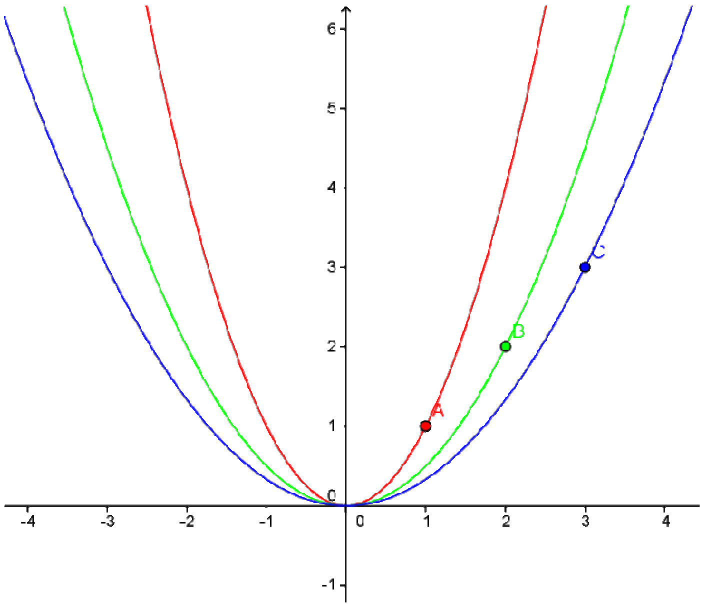
e obteremos os seguintes dados e respectivos gráficos.

x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = 3x^2$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27
4	16	32	48
5	25	50	75
6	36	72	108

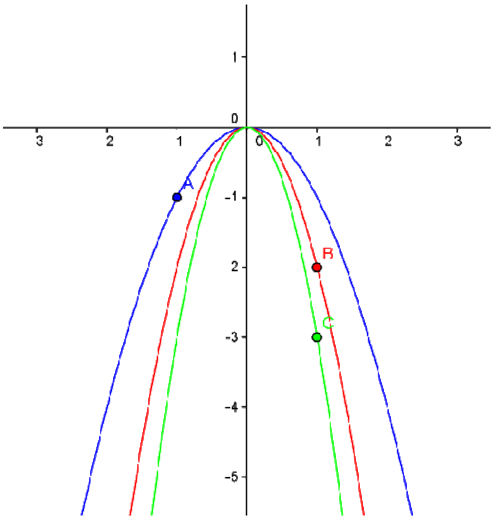


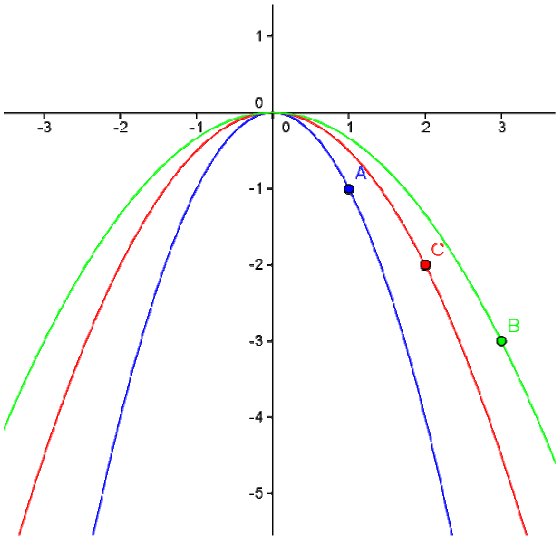
Para $0 < a \leq 1$ podemos obter os seguintes valores e gráficos:

x	***$y = x^2$***	***$y = (1/2)x^2$***	***$y = (1/3)x^2$***
-3	9	4,5	3
-2	4	2	1,33
-1	1	0,5	0,33
0	0	0	0
1	1	0,5	0,33
2	4	2	1,33
3	9	4,5	3



Para $a < 0$ iremos obter as seguintes parábolas:





Da análise feita, podemos concluir que os gráficos das funções do tipo $y=ax^2$, $a \neq 0$ são parábolas com a concavidade voltada para cima se a é positivo e voltada para baixo se a é negativo.

Se $|a| > 1$, a parábola é mais estreita, isto é, tem os seus ramos mais próximos do eixo de simetria do que a parábola de equação $y = x^2$.

Se $0 < |a| < 1$, , a parábola é mais larga, isto é, tem os seus ramos mais afastados do eixo de simetria do que a parábola de equação $y = x^2$.

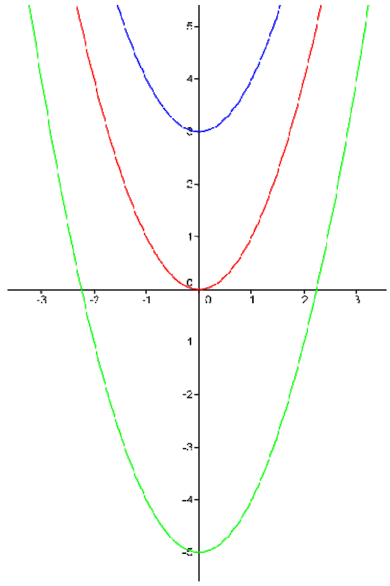
Funções do tipo $y = x^2 + k$, com $k \in R$:

Analisemos agora, por exemplo, o comportamento das funções $\mathbf{y_2 = x^2 + 3}$ e $\mathbf{y_3 = x^2 - 5}$.

Comparemos os valores obtidos por estas funções com os de $\mathbf{y_1 = x^2}$.

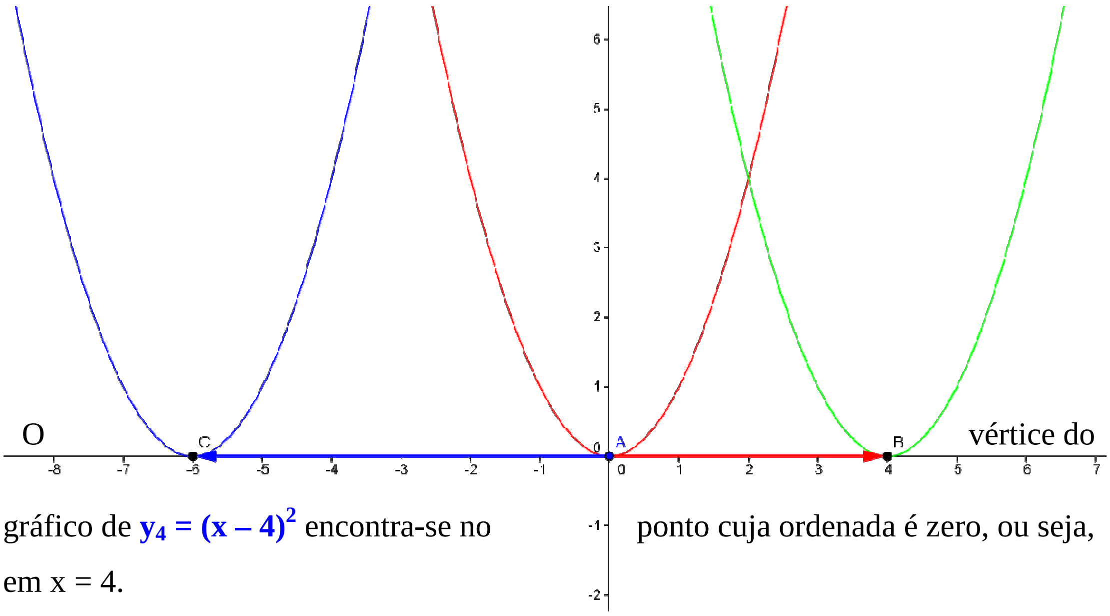
x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^2 + 3$	$y_3 = x^2 - 5$
-3	9	12	4
-2	4	7	-1
-1	1	4	-4
0	0	3	-5
1	1	4	-4

2	4	7	-1
3	9	12	4



Funções do tipo $y = (x – h)^2$, com $h \in R$:

Representemos, por exemplo, as funções $\mathbf{y_4 = (x – 4)^2}$ e $\mathbf{y_5 = (x +6)^2}$, comparando os seus gráficos com o de $\mathbf{y_1 = x^2}$.



O vértice do gráfico de $\mathbf{y_4 = (x – 4)^2}$ encontra-se no ponto cuja ordenada é zero, ou seja, em x = 4.

Analogamente, o vértice do gráfico de $\mathbf{y_5 = (x +6)^2}$ encontra-se em x = - 6, ou seja no ponto (- 6, 0)

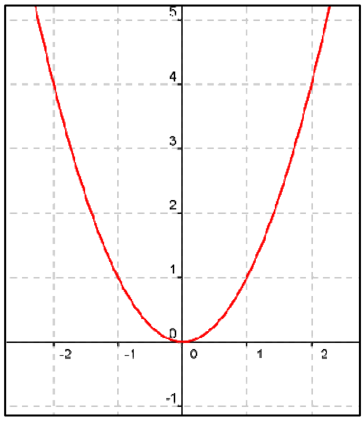
Podemos então concluir, após observação do gráfico, que no caso da função

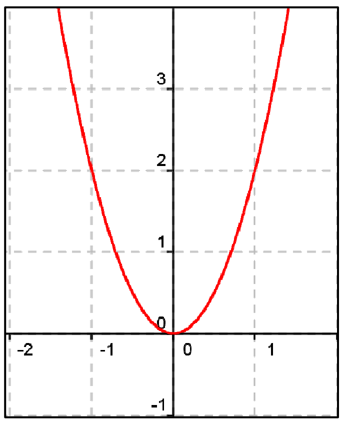
$y_4 = (x – 4)^2$ obtém-se fazendo uma translação do gráfico $y_1 = x^2$, associada ao vector w(4,0).

<u>Funções do tipo $y = a (x - h)^2 + k$:</u>

Vejamos agora como obter, por exemplo, o gráfico da função definida por
$y = - 2 (x - 4)^2 – 1$ a partir do gráfico de $y = x^2$.

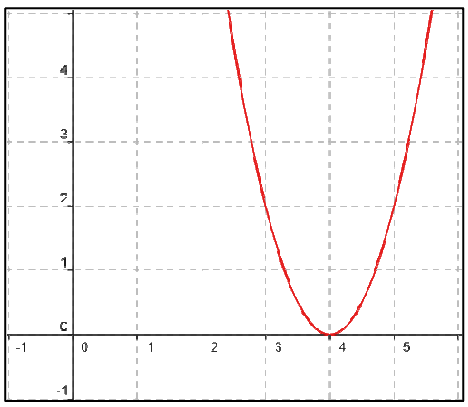
<u>1º Passo:</u> Desenhar a função $y = x^2$.





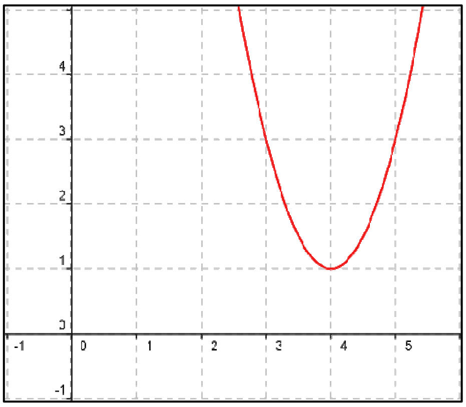
<u>2º Passo:</u> Multiplicar a função anterior por 2 para obter a função $y = 2x^2$.

<u>3º Passo:</u> Fazer a translação associada ao vector de coordenadas (4,0). A parábola vai deslocar-se 4 unidades para a direita. Obtemos assim a função
$y = 2(x – 4)^2$

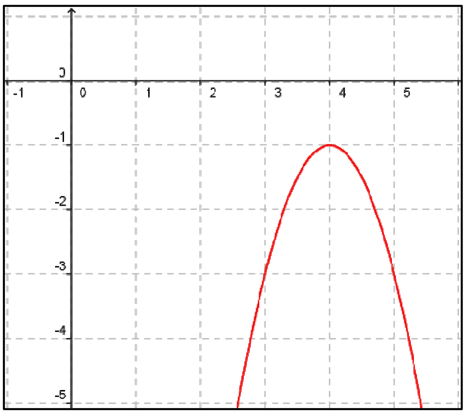


<u>4º Passo:</u> Fazer a translação associada ao vector de coordenadas (0,1). A parábola vai deslocar-se 1 unidade para a cima. Obtemos assim a função

$y = 2(x - 4)^2 + 1$



<u>5ºPasso:</u> Por último basta fazer a simetria da parábola que temos neste momento em relação ao eixo das abcissas (eixo dos xx), para obtermos finalmente o gráfico da função **$y = -2(x - 4)^2 - 1$**



<u>Funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$:</u>

Como acabámos de ver, se a função quadrática for definida por uma expressão da forma

$$y = a(x - h)^2 + k, \text{ com } a, h, k \in R \text{ e } a \neq 0$$

o vértice da parábola determina-se de forma imediata e podemos facilmente indicar como pode ser obtido o gráfico dessa função à custa da parábola de equação y = x^2.

- Mas como proceder se a função for definida por uma expressão do 2º grau, com a forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, sendo a, b, c ϵ R e a ≠ 0?
- Quais serão as coordenadas do vértice da parábola?
- E qual é o seu eixo de simetria?

Vejamos:

Os pontos em que a curva intersecta a recta y = c, obtêm-se resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a + bx) = 0 \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \\ y = c \end{cases}$$

As soluções são 0 e - $\frac{b}{a}$.

A abcissa do vértice é o valor médio entre 0 e - $\frac{b}{a}$.

Vem então:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Assim, se considerarmos $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, as coordenadas do vértice da parábola são

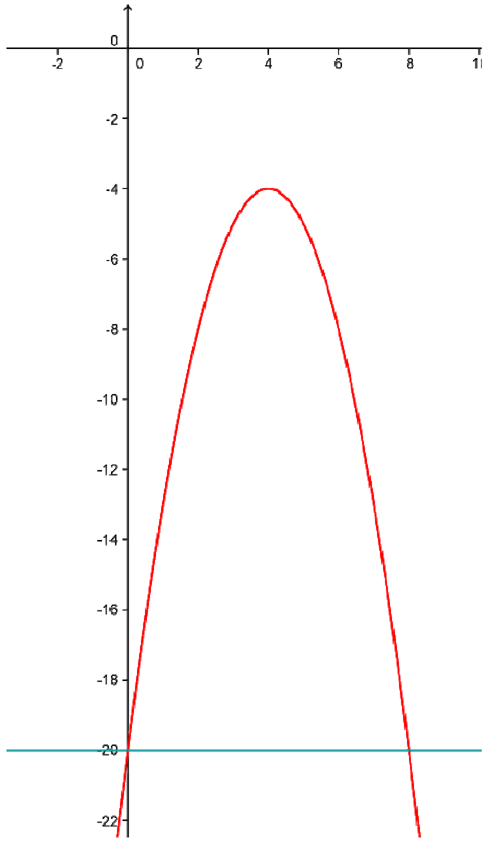
$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

e o eixo de simetria da parábola é a recta $x = -\frac{b}{a}$.

<u>Exemplo:</u>

Obtenção do vértice da parábola de equação

$y = - x^2 + 8x - 20$.



Resolução:

Os pontos de intersecção d recta y = - 20 com a parábola têm de abcissa as soluções da equação

$$x^2 + 8x - 20 = - 20 \Leftrightarrow - x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 8$$

O vértice tem portanto abcissa 4.

Depois de conhecida a abcissa basta substituir na equação o valor de x e encontra-se o valor de y.

Neste caso o vértice vai ser (4,-4).

<u>Sinal da função quadrática:</u>

Uma função quadrática pode ser positiva em todo o seu domínio, negativa em todo o seu domínio ou ter uma parte positiva e outra negativa. Vamos então estudar o sinal da função quadrática que é o mesmo que determinar os intervalos de mais amplos em que o gráfico está “acima” do eixo dos xx ou “abaixo” do eixo dos xx.

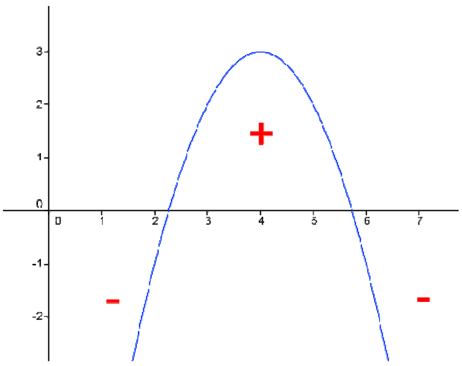
Quando uma função deste tipo tem dois zeros, estes separam no gráfico a parte positiva da negativa, isto é, o eixo dos xx é interceptado duas vezes pela parábola.

Para se estudar o sinal da função tem de se averiguar se esta tem zeros. Como estamos perante uma função quadrática vamos usar a fórmula resolvente em que a expressão $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ chama-se binómio discriminante e representa-se por Δ (lê-se delta).

Então $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

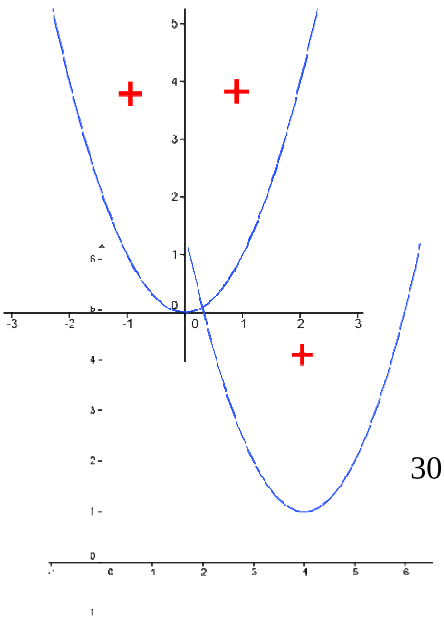
1. se $\boldsymbol{\Delta > 0}$, a função tem dois zeros e o gráfico tem uma parte positiva e outra negativa;
2. se $\boldsymbol{\Delta = 0}$, a função tem um zero e o gráfico está situado “acima” do eixo do xx ou “abaixo” do eixo dos xx, interceptando-o apenas num ponto que será o seu vértice;
3. se $\boldsymbol{\Delta < 0}$ a função não tem zeros e o seu gráfico está “acima” ou “abaixo” do eixo dos xx.

Caso 1:



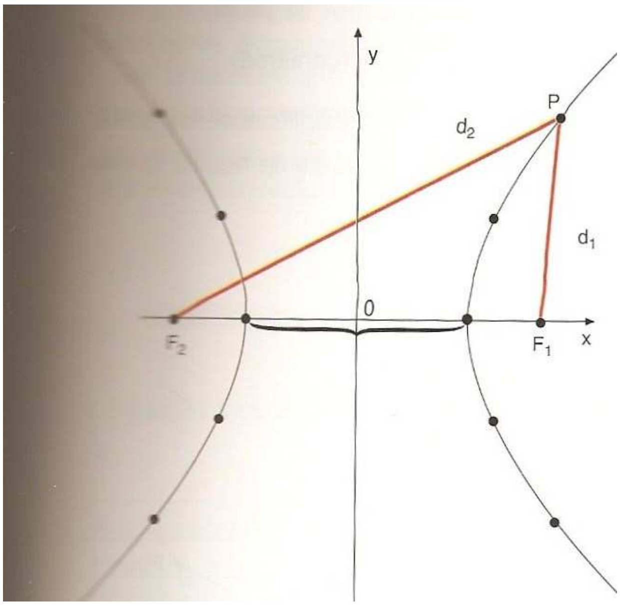
Caso 2:

Caso 3:



5. HIPÉRBOLES

A hipérbole é uma secção de uma superfície cónica de revolução por um plano que corta todas as geratrizes menos duas, portanto estritamente paralelo a duas geratrizes, ou seja, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que é constante a diferença, em módulo, das suas distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados focos. Essa constante tem de ser inferior à distância entre os focos.



Estudo Analítico:

O estudo analítico faz-se melhor usando o eixo das abcissas a recta F_2F_1, orientada de F_2 para F_1, e para eixo das ordenadas a mediatriz de $[F_2F_1]$.

Problema:

- ➔ Caso Particular:

  $|d_1\text{-}d_2|=3$ e $\overline{F_1F_2} = 5$

  Tem-se F1=($\frac{5}{2}$,0) e F2=(- $\frac{5}{2}$, 0). Sendo P(x,y) um ponto da hipérbole vem,

  |d1-d2|=3⇔ $\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2} = \pm 3$

É uma condição que define analiticamente a hipérbole.

Isolando um radical,

$$\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + y^2} = \pm 3 + \sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$$

e quadrando ambos os membros,

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 9 \pm 6\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2} + \left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

Desenvolvendo os quadrados dos binómios,

$$-5x = 9 \pm 6\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2} + 5x$$

prova-se que não se introduzem soluções estranhas e obtém-se a igualdade,

$$-9 - 10x = \pm 6\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2}$$

Quadrando de novo ambos os membros,

$$(-9-10x)^2 = \left(\pm 6\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2$$

E simplificando a equação, obtém-se,

$$16x^2 - 9y^2 = 36$$

Que é equivalente à inicial.

Esta equação pode-se ainda escrever na forma,

$$\frac{16x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$

Ou então na forma,

$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

Que tem o nome de equação reduzida da hipérbole.

➔ Caso Geral:

Consideremos um referencial ortonormado, de modo que seja $F_1=(c, 0)$ e $F_2=(-c, 0)$, sendo 2c a distância focal.

Seja P (x,y) um ponto genérico da hipérbole e seja $0<a<c$.

Por definição, $|d_1 - d_2| = 2a$, donde,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Condição que define a hipérbole.

Isolando o primeiro radical,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

E quadrando ambos os membros,

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Obtém-se,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

E simplificando,

$$(x+c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2$$

Desenvolvendo os quadrados dos binómios,

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

Que simplificando dá,

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Ou seja, dividindo tudo por 4 dá,

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Quadrando novamente obtém-se,

$$(xc - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Ou seja,

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Mas, como 0<a<c, a expressão $c^2 - a^2$ é positiva, logo pode-se fazer $c^2 - a^2 = b^2$ e a equação transforma-se na condição equivalente,

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \bigwedge b^2 = c^2 - a^2$

Ou seja,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \bigwedge b^2 = c^2 - a^2$

É a equação reduzida da hipérbole visto que se prova ser equivalente à condição inicial. Das constantes a, b, c, sabemos por enquanto, que são positivas, que c é a semi distância focal, que a<c por definição, que b<c por construção e que $c^2 = a^2 + b^2$, logo podem ser medidas de lados de um triângulo retângulo.

Discussão da equação reduzida de uma hipérbole:

A equação reduzida é dada por,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- A curva correspondente terá de ser simétrica em relação ao eixo dos xx e em relação ao eixo dos yy, visto que x e y estão elevados a expoente par. Isto é, se um ponto P=(x,y) pertence à hipérbole, então os pontos (-x,y), (x, -y) e (-x,-y) também pertencem à cónica. Conclui-se assim que a curva é a reunião de dois ramos e também é simétrica em relação à origem das coordenadas.

- Exprimindo y em função de x, obtém-se,

  $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \bigvee y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

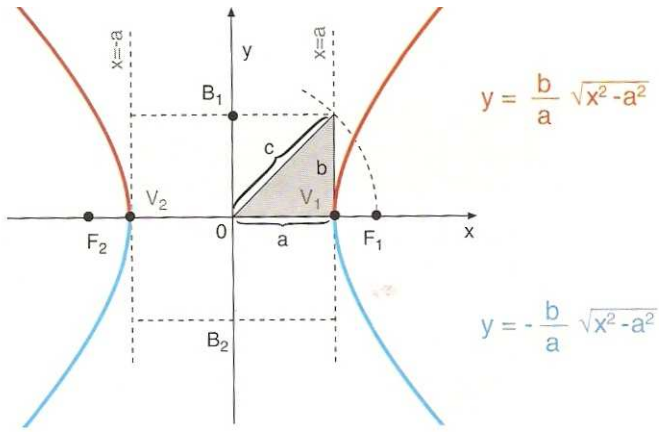
  Logo a hipérbole é a reunião dos gráficos destas duas funções.

  Na primeira, os valores de y são sempre positivos ou nulos, logo o gráfico correspondente é a parte da hipérbole situada a cima do eixo dos XX ou no eixo. Analogamente, a outra equação define a parte da hipérbole abaixo do eixo dos XX.

- O domínio de qualquer uma destas funções é dado por,
  $x^2 \geq a^2 <=> |x| \geq |a| <=> x \geq a \vee x \leq -a \quad (a > 0)$

  $D =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$

  Isto significa que não pode haver pontos da hipérbole entre as rectas x=-a e x=a, logo a hipérbole não intersecta o eixo das ordenadas.



- Para $x = \pm a$ vem y=0 em qualquer das equações, o que mostra que os dois gráficos (acima e abaixo de OX) cortam o eixo das abcissas por pontos $V_1=(a,0)$ e $V_2=(-a,0)$, chamados vértices da hipérbole.
- Como, além disso, as expressões $\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ definem funções contínuas no seu domínio, concluímos que cada ramo da hipérbole é uma linha contínua.
  A medida do comprimento de $[V_1V_2]$ eixo transverso da hipérbole, é precisamente igual a 2a, valor constante de $|d_1-d_2|$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = -\infty$ logo qualquer dos ramos da hipérbole é uma linha aberta.
- Informações dadas pelas derivadas:

  De $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, vem $y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ e $y'' = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} < 0$

  Estudo da Monotonia:

	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
y'		$-$	X		X	$+$	
y		↘	O		O	↗	

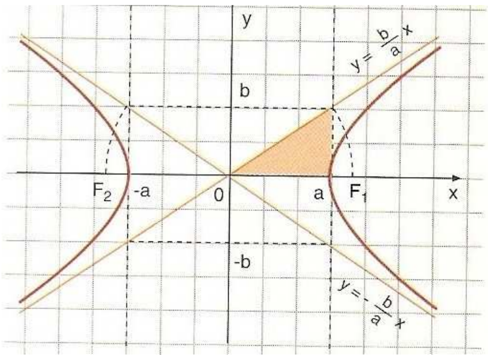
Quando a 1ª derivada é positiva, a função é crescente e quando a 1ª derivada é negativa, a função é decrescente.

A 2ª derivada ao ser negativa mostra que a concavidade voltada para baixo.

Por simetria em relação ao eixo das abcissas, conclui-se facilmente qual o traçado dos dois meios ramos inferiores.

- A interpretação geométrica do valor de b resulta da relação $c^2 = a^2 + b^2$ que traduz o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo tracejado na figura. (Para se obter o triângulo, traça-se as assíntotas, ou seja, corta-se a tangente no vértice por um arco de raio c e centro O=(0,0) .)

O segmento $[B_1B_2]$ chama-se eixo não transverso da hipérbole. Também a medida de $\overline{B_1B_2}$, que é 2b, se pode designar por "eixo não transverso". Vê-se ainda que $B_1=(0,b)$ e $B_2=(0,-b)$.



Assimptotas:

- Vê-se facilmente que a curva não tem assimptotas verticais, mas tem assimptotas oblíquas. Começa-se por estudar a função definida por,

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ quando $x \to +\infty$

Declive da assimptota:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}$$

Ordenada na origem da assimptota:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right]=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right]=0$$

Então,

$$y=\frac{b}{a}x$$

Agora quando $x\to-\infty$, nota que $x=-\sqrt{x^2}$.

Declive da assimptota:

lim┬(x → −∞) 〖y/x = b/a lim┬(x → −∞) √(x↑2 − a↑2)/x〗 = b/a lim┬(x → −∞) − √(x↑2

Ordenada na origem da assimptota:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x\right]=\frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0$$

Logo, $y=-\frac{b}{a}x$.

Trabalha-se com a função definida por $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ e encontra-se a assimptota $y=\frac{b}{a}x$, quando $x\to-\infty$, e $y=-\frac{b}{a}x$ quando $x\to+\infty$.

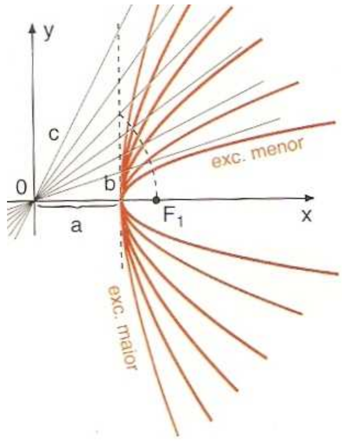
Conhecendo a e c, é muito fácil construir as assimptotas, basta cortar as rectas x=a e x=-a por um arco de centro O e raio c.

Os pontos obtidos, de coordenadas (a,b) e (-a,b), pertencem à assimptota $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$ respectivamente.

Excentricidade:

A excentricidade de uma hipérbole é o quociente da distância focal pelo eixo transverso.

Numa hipérbole, $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$, e>1.



Quanto maior é a excentricidade maior é a "abertura" dos ramos da hipérbole. Sendo, por definição, c>a, a excentricidade duma hipérbole é sempre maior que 1.

No caso limite $e \to 1$ logo $2a \to 2c$, ou seja, o valor $|d_1 - d_2| \to \overline{F_1F_2}$.

A hipérbole degenera então em duas semi-rectas, de sentidos opostos, uma com origem em F_1, outra em F_2.

Quando se tem a=b (semieixo transverso igual ao não transverso) chama-se hipérbole equilátera e é um caso particular das hipérboles. Assim sendo, os declives das assimptotas são $\pm\frac{b}{a}$, a hipérbole equilátera tem por assimptotas rectas perpendiculares de declive +1 e -1, ou seja, as bissectrizes dos quadrantes, caso a hipérbole tenha o centro na origem.

A equação reduzida desta hipérbole equilátera é,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ou seja,

$$x^2 - y^2 = a^2$$

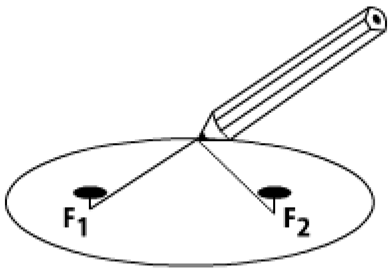
Onde a é o semieixo transverso.

Sendo $c^2 = a^2 + b^2$ vem $c^2 = 2a^2$ donde $\frac{c^2}{a^2} = 2$.

Logo, a excentricidade duma hipérbole equilátera é $\sqrt{2} = 1.414 \ldots$.

6. ACTIVIDADES

6.1. Actividade para construir uma elipse



Usa-se o “processo do jardineiro” que o desenho sugere para traçar uma elipse.

Supõe-se que o cordel tem 10cm (livres) e que os pioneses distam 8cm.

Procura-se:

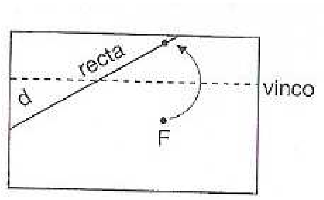
- Pontos da linha equidistantes dos dois punaises
- Pontos da linha que distam 10 cm um do outro
- Pontos cujas distâncias aos dois punaises tem-se soma menor que 10
- Eixos de simetria da linha
- Pontos cujas distâncias aos dois punaises somem 8 cm

No GeoGebra:

- Construir uma elipse, colocando os focos A e B;
- Colocar um ponto sobre a elipse, D, para se poder movimentar;
- Fazer o segmento AD (renomeado por a) e o segmento BD (renomeado por b);
- Soma das distâncias é a soma dos dois segmentos é a mesma para qualquer ponto D sobre a elipse, s=a+b.

6.2. Actividade para construir uma parábola

Numa folha de papel marca-se uma recta e um ponto F fora dela.

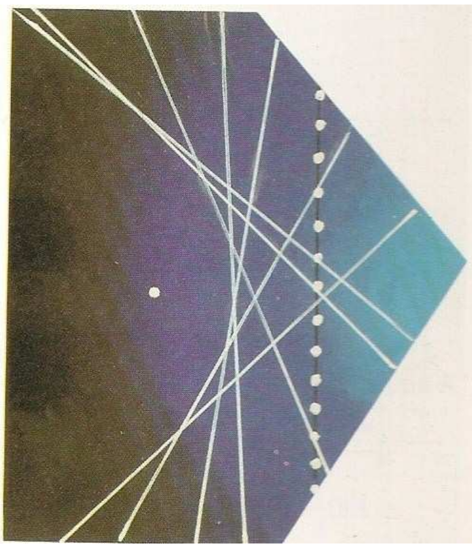


Dobra-se o papel, de modo que F coincida com um ponto qualquer da recta e vinca-se bem a dobra. Repete-se a operação usando diferentes pontos da recta. Os vincos ficam todos tangentes a uma parábola que começa a delinear-se no papel.

Procura-se:

- O ponto da curva mais próximo de d
- Os dois pontos X tais que XF é paralelo a d

Qual a distância entre estes dois pontos?



No GeoGebra:

- Desenha-se o ponto A;
- Desenha-se uma recta directriz que passa pelo ponto B e pelo ponto C, a recta a;
- Construir uma parábola com foco em A;

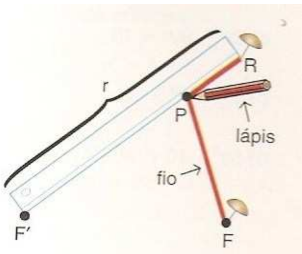
- Desenha-se um ponto D sobre a parábola;
- Desenha-se a recta perpendicular à recta directriz que passa por D, a recta b;
- Encontra-se o ponto E, de intersecção entre as duas rectas a e b;
- Traçar o segmento DE, o segmento d;
- Depois o segmento DA, o segmento e;
- Oculta-se a recta b;
- Movimenta-se o ponto D sobre a parábola e verifica-se que a distância dos segmento d e e têm a mesma medida de comprimento.

Outra actividade no GeoGebra:

- Desenha-se uma recta a que passa pelos pontos A e B;
- Oculta-se os pontos A e B;
- Desenha-se um ponto C fora da recta a e um ponto D que pertence a a;
- Desenha-se o segmento de recta CD;
- Constrói-se a recta mediatriz do segmento de recta CD;
- Activa-se o traço à recta mediatriz;
- Movimenta-se o ponto D sobre a recta directriz e observa-se a parábola que vai aparecendo.

6.3. Actividade para construir uma hipérbole

Com régua e fio.



F e F' pontos fixos.

Régua: $r > \overline{FF'}$

Fio de comprimento f um pouco menor do que r (a diferença r-f tem de ser menor que $\overline{FF'}$)

Fixar (punaises ou fita-cola):

- Um extremo da régua em F’
- Um extremo do fio em F
- Outro extremo do fio no outro extremo da régua

Mantendo o bico do lápis de modo a esticar o fio encostado à régua, traça-se parte dum ramo de hipérbole:

$$\begin{array}{l} \overline{PF'} + \overline{PR} = r \\ \overline{PF} + \overline{PR} = f \\ \hline \overline{PF'} - \overline{PF} = r - f \text{ (constante)} \end{array}$$

Troca depois as posições da régua e do fio em relação aos focos: obterás parte do outro ramo de hipérbole.

Procura:

a) Um ponto de [FF’] que pertence à hipérbole
b) Dois pontos da hipérbole cuja distância é r-f
c) Os pontos P tais que $\left|\overline{PF'} - \overline{PF}\right| = \overline{FF'}$

No GeoGebra:

- Construir uma hipérbole, colocando os focos A e B;
- Colocar um ponto D (por exemplo, ramo do lado direito) para se poder movimentar;
- Constrói-se os segmentos AD (renomeado por segmento a) e BD (renomeado por segmento b);
- Subtracção das distâncias é a diferença dos dois segmentos é a mesma para qualquer ponto D no mesmo ramo da hipérbole, d=a-b.

7. Conclusão

Este relatório serviu-nos como suporte para a realização da apresentação de PowerPoint. Realizamos também algumas actividades e alguns exercícios para resolver com os nossos colegas e com a professora (os nossos alunos de momento).

Em relação às actividades optamos fazer manualmente só para o caso da elipse pois para as outras tornava-se mais difícil realizar, por exemplo o caso da parábola era fazer muitos vincos no papel e ia ser difícil verificar que surgia uma parábola, no entanto, como conhecíamos um pouco do software do GeoGebra optaremos por desenvolver mais as actividades no GeoGebra.

Esperamos que todos gostem da nossa apresentação embora a achemos muito extensa mas por outro lado a aula é para 3h. Acho que o mais difícil é calcular o que temos de fazer para o tempo pretendido.

8. Bibliografia/Webgrafia

- Areal, Zita, Visulamente 7|8|9, Areal Editores;

- Lima, Yolanda, Gomes, Francelino, XeqMat – Matemática 12ºano, 1ª edição, Editorial O Livro;
- Neves, Maria Augusta Ferreira, Funções 1 – 10ºano, Porto Editora, 2000;
- http://www.youtube.com/watch?v=b6tjaf_ACC0;
- http://www.youtube.com/watch?v=1ymkyDpnuA8.