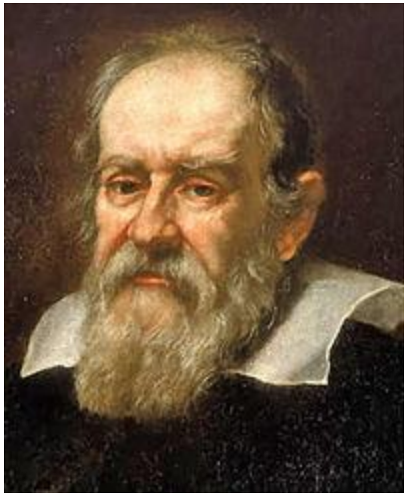
MEDINDO O UNIVERSO COM TELESCÓPIOS

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS

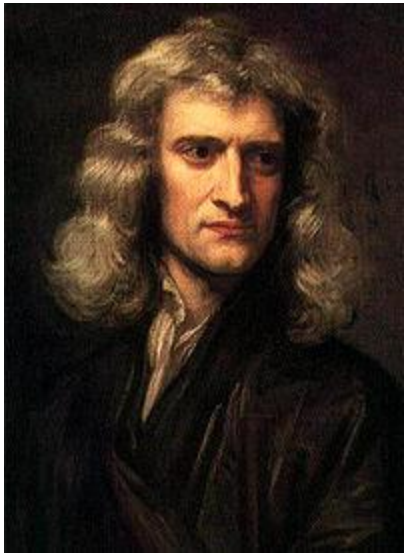
CIÊNCIA MODERNA

- Floresceu no século XVII



Galilei Galilei
1564 - 1642

Johannes Kepler
1571 - 1630



Isaac Newton
1642 - 1727

CIÊNCIA MODERNA

- Método Experimental
- Carácter Quantitativo
- Teoria matemática

Método Experimental

- Carácter probatório e demonstrativo
- Não se satisfaz com deduções teóricas
- Requer testes, fundamentações, experimentações

Carácter Quantitativo

- A física de Aristóteles apenas dava explicações qualitativas para os fenómenos observados
- A ciência antiga procurava explicar PORQUE uma maçã caía de uma árvore.
- Galileu estava mais interessado em saber COMO a maçã caía ignorando quaisquer justificações qualitativas
- Procurou uma descrição matemática para eventos tais como o movimento de queda livre de um corpo

Teoria Matemática

- Isaac Newton
- Permite fazer previsões e explicar uma grande variedade de fenómenos
- O trabalho de Newton combinou as leis observadas de movimento planetário de Newton com as leis da mecânica que aparentavam governar os fenómenos terrestres
- Gravidade, movimento planetário e marés

DA GRÉCIA A GALILEU

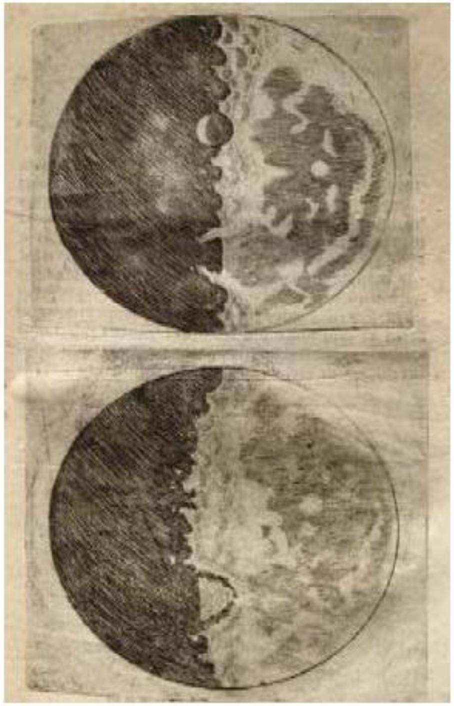
- Galileu começou o seu investimento na Astronomia em 1609
- 1609 - um fabricante de lentes holandês descobre como alcançar grandes ampliações ao combinar duas lentes de uma forma especial num longo tubo
- Invenção do Telescópio

DA GRÉCIA A GALILEU

- Galileu procurou então construir o seu próprio telescópio
- Conseguiu triplicar a ampliação conhecida
- Dominou os problemas de polir as lentes e experimentar diferentes arranjos das lentes no tubo
- Conseguiu atingir ampliações 33 vezes superiores
- Grande evolução no mundo da Astronomia

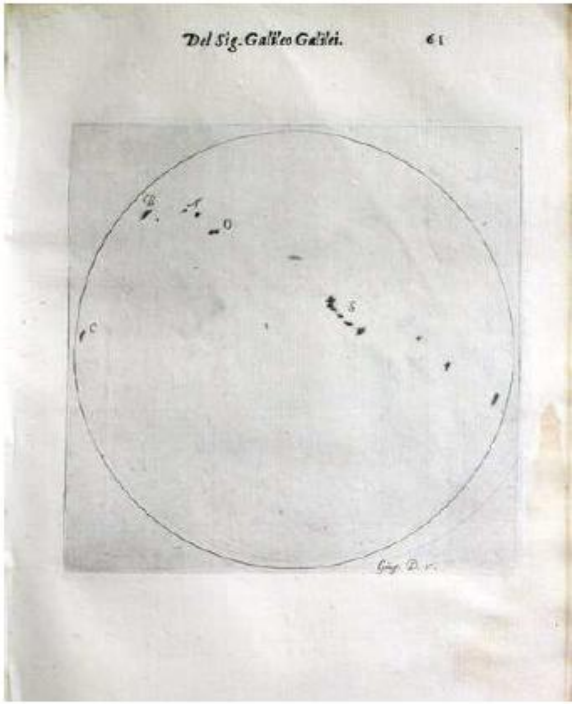
DA GRÉCIA A GALILEU

- Viu as faces da Lua: tinha montes e vales e não era uma esfera perfeita como concebida pela teoria Aristotélica



DA GRÉCIA A GALILEU

- Observou manchas solares mostrando que também o Sol não era perfeito

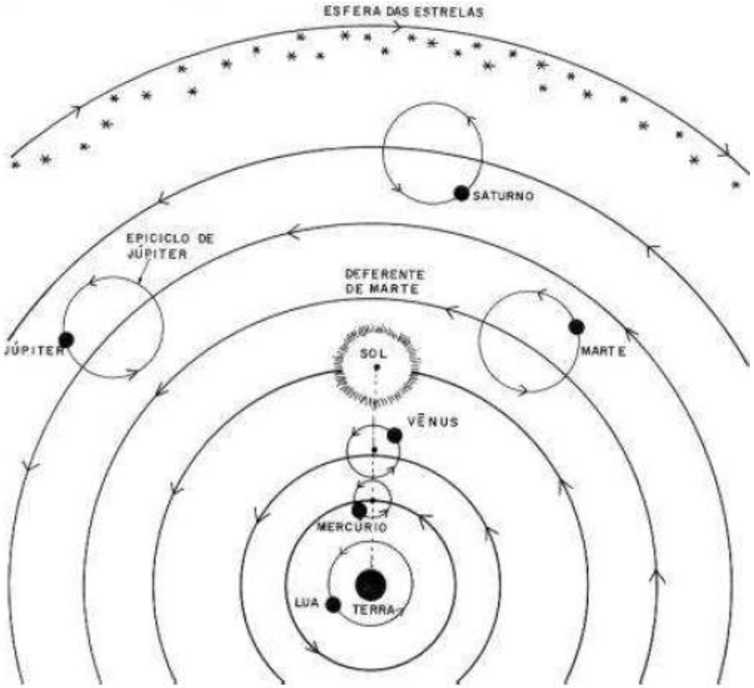


DA GRÉCIA A GALILEU

- Estas observações chocaram os seus contemporâneos pois contradizia concepções existentes há séculos sobre a natureza do universo
- Aristóteles e Ptolomeu
- Terra era o centro imóvel do universo que era concebido como uma enorme esfera celestial que girava em torno da Terra e onde todas as estrelas estariam fixas

DA GRÉCIA A GALILEU

- Teoria Geocêntrica
- Prevaleceu por quase dois milénios
- Apoiada por quase todos os académicos, Igreja Católica, Igreja Luterana e líderes Judeus

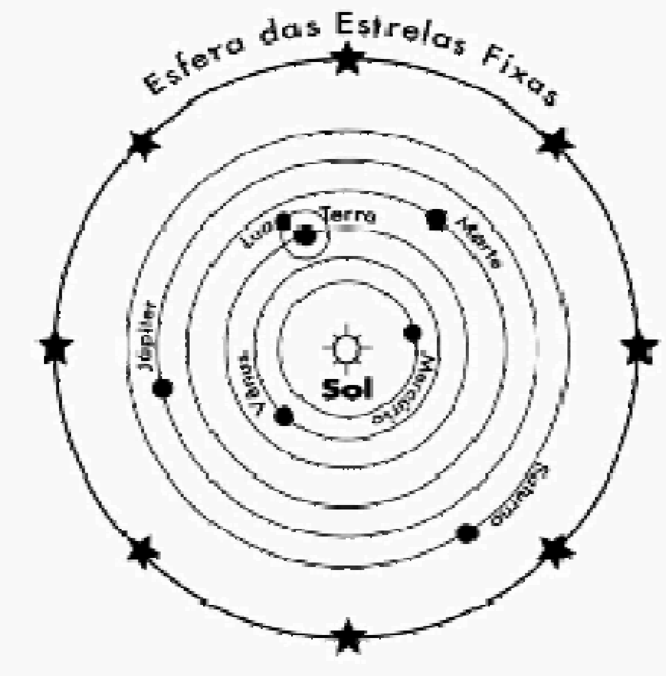


DA GRÉCIA A GALILEU

- Teoria Heliocêntrica
- Proposta por Aristarco de Samos no século III a.C.
- Trabalho ignorado
- Colocava o sol no centro do universo

DA GRÉCIA A GALILEU

- Teoria recuperada numa forma modificada 1800 anos depois por um jovem estudante polaco
- Nicolau Copérnico
- Argumentou que todos os planetas incluindo o nosso, se moviam em esferas concêntricas (com ligeiras modificações) em torno do Sol



DA GRÉCIA A GALILEU

- Argumento devastador contra apoiantes da Teoria Geocêntrica
  - Galileu descobriu quatro luas que orbitavam o planeta Júpiter
  - Se Júpiter um planeta possuía luas então a Terra poderia e deveria também ser considerada um planeta
  - Estas luas de Júpiter não orbitavam a Terra, o presumível centro do universo

MELHORANDO O TELESCÓPIO

- Meio século depois de Galileu
- Newton recorreu ao seu génio para melhorar o instrumento

MELHORANDO O TELESCÓPIO

- Telescópio de Galileu
  - telescópio refractor que dobrava os raios luminosos por meio das lentes
  - Tinha duas deficiências
    - O vidro usado para as lentes tinha de ser de alta qualidade e sem falhas para minimizar distorções
    - A flexão dos raios luminosos separa as cores contidas na luz branca introduzindo uma distorção chamada aberração cromática

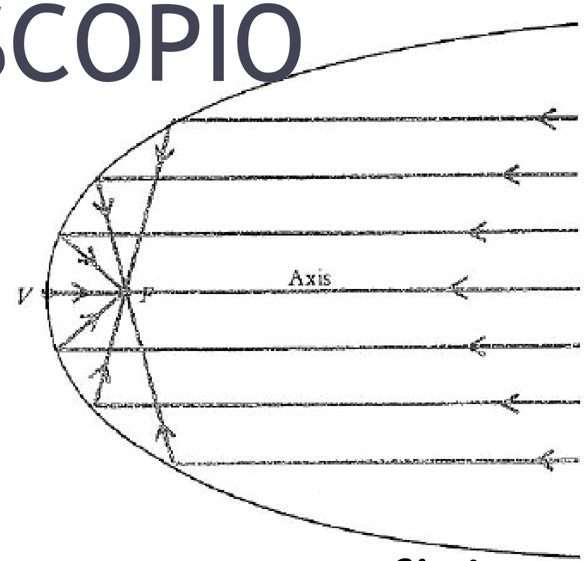
MELHORANDO O TELESCÓPIO

- O primeiro problema foi eliminado
- Segundo problema foi reduzido usando um espelho em vez de uma lente

MELHORANDO O TELESCÓPIO

- Telescópio de Newton
  - telescópio reflector com um espelho para captação de luz em vez da lente usual
- Newton era estudante e admirador da Geometria grega
- Sabia que a melhor forma para o espelho seria a forma parabólica

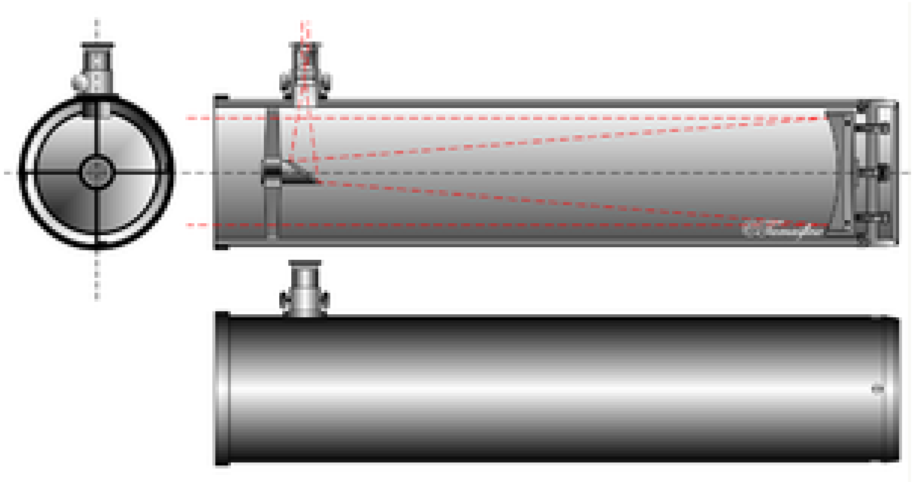
MELHORANDO O TELESCÓPIO



- Parábola
  - Vértice
  - Eixo de Simetria
  - Foco
- Raios luminosos que ao embater na superfície côncava da parábola são redireccionados e acumulados no foco
- Dificuldades para construir espelho parabólico

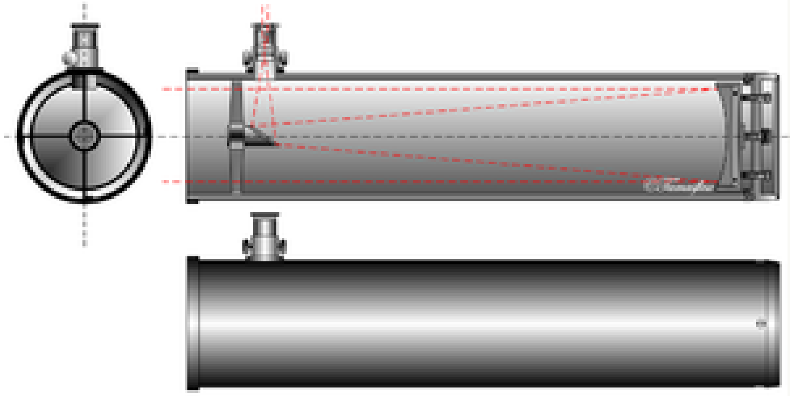
MELHORANDO O TELESCÓPIO

- Usou espelho esférico em alternativa
- Acumula os raios luminosos no centro da esfera
- Mas para isso o observador teria que estar colocado no centro da esfera bloqueando a entrada de luz



MELHORANDO O TELESCÓPIO

- Colocou espelho esférico na base de um cilindro para o espelho reflectir os raios luminosos que entrassem para o foco
- Para ver a imagem colocou um pequeno espelho plano perto do foco para reflectir a imagem para a parte lateral do telescópio

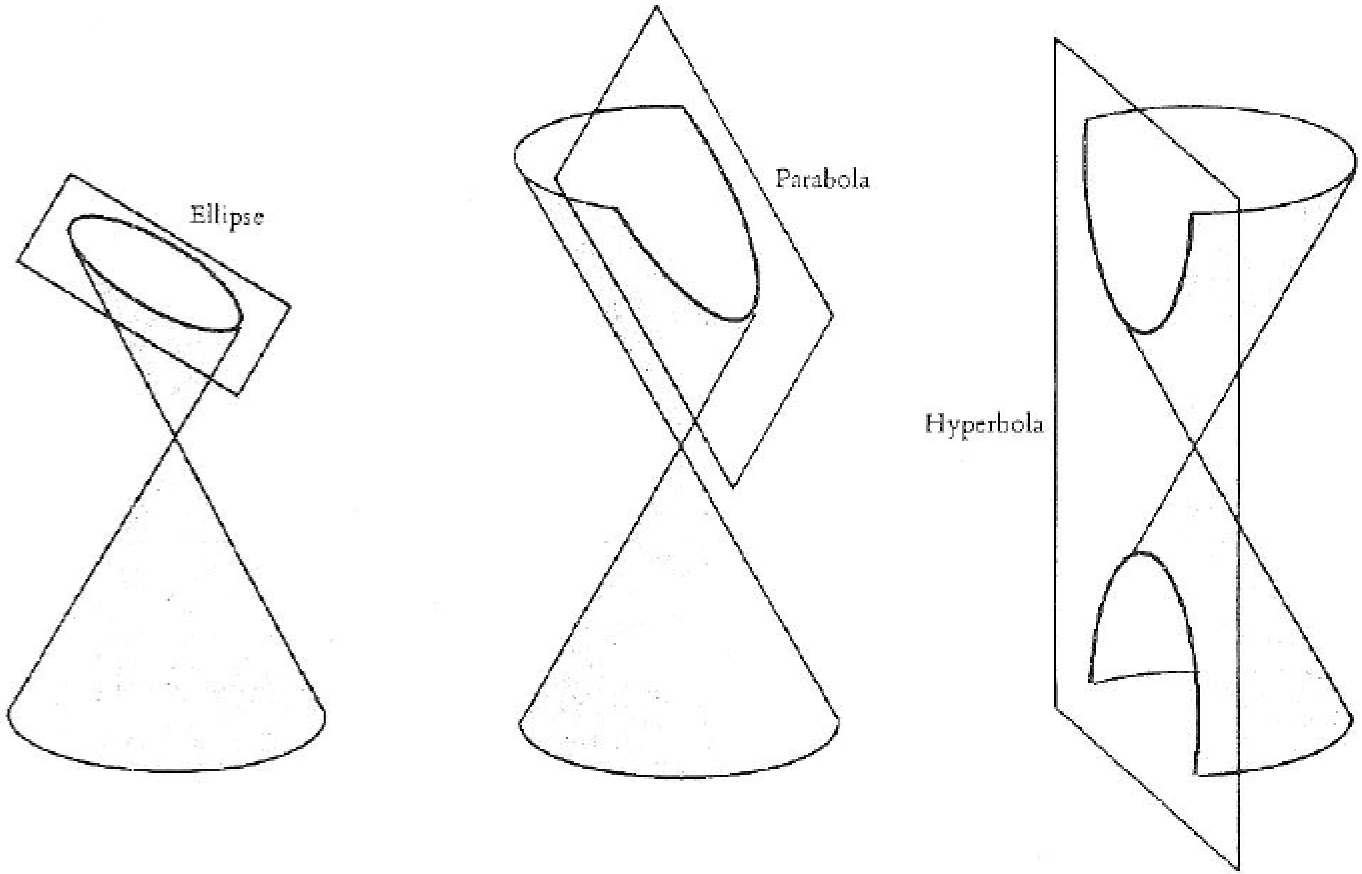


MELHORANDO O TELESCÓPIO

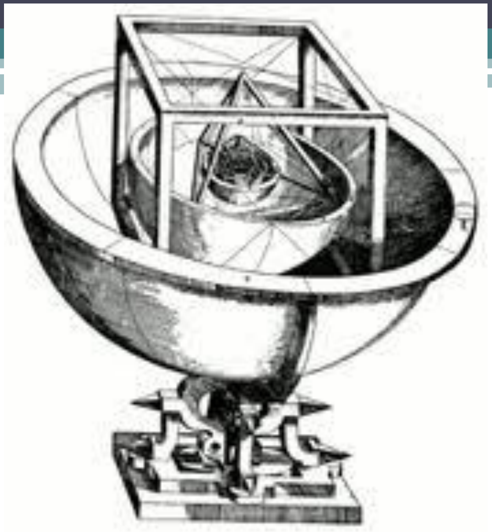
- Quatro anos depois
- Cientista francês Cassegrain
- Concebeu espelho parabólico
- Telescópio: primeira aplicação tecnológica da propriedade focal das parábolas

SECÇÕES CÓNICAS

- Cónica
  - Curva gerada na intersecção de um plano que atravessa um cone
- Três tipos de secções cónicas
  - Elipse
  - Parábola
  - Hipérbole
- Descobertas destas secções remetem-se ao tempo dos Gregos


Ellipse
Parabola
Hyperbola

JOHANNES KEPLER



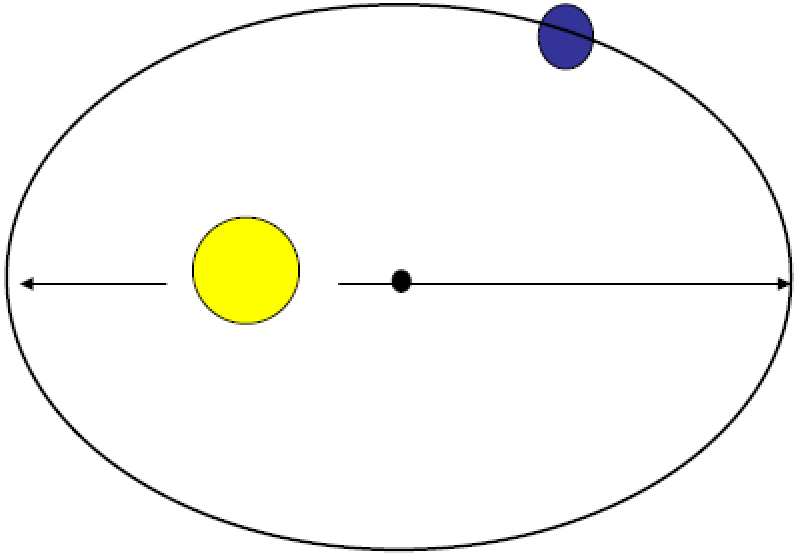
- Brilhante matemático
- Desenvolveu teoria mística para o sistema solar relacionando os seis planetas conhecidos (na época) com os cinco sólidos platónicos
- Precisou de dados astronómicos rigorosos

JOHANNES KEPLER

- Tycho Brahe possuía esses dados
- Passou 20 anos a fazer registos extremamente rigorosos das posições planetárias e das posições de 1000 estrelas
- Kepler tornou-se seu assistente
- LEIS DE KEPLER

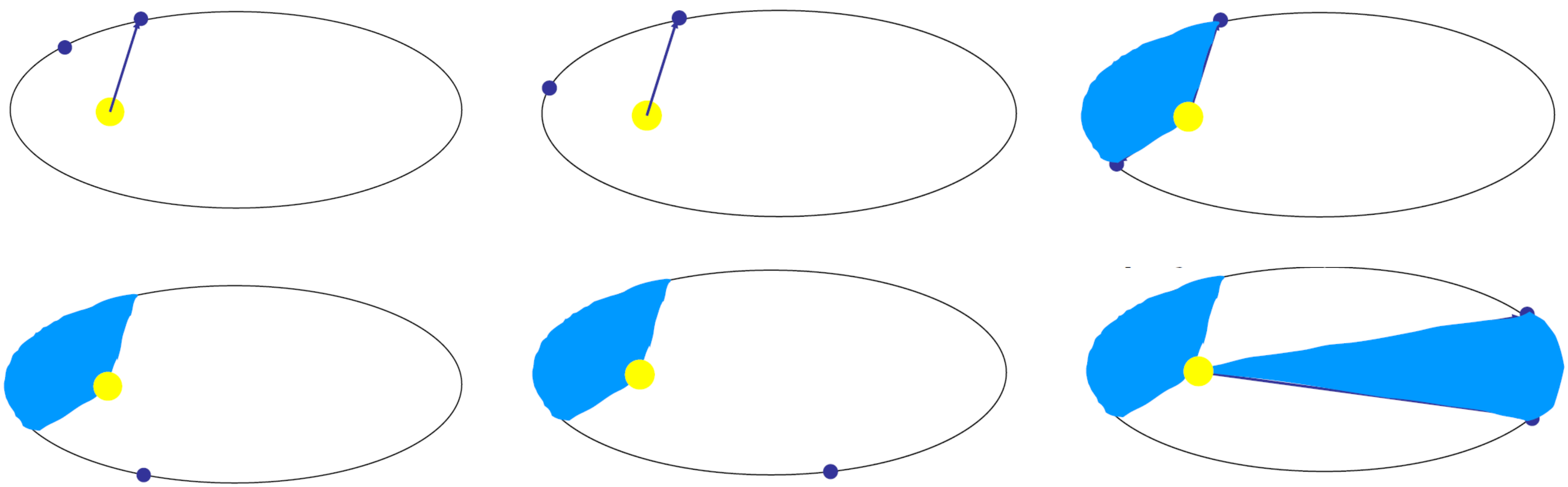
JOHANNES KEPLER

- Lei das trajectórias elípticas
  - A órbita de cada planeta é uma elipse com o sol no seu foco



JOHANNES KEPLER

- Lei das áreas
  - Durante cada intervalo de tempo o segmento de recta juntando o sol e um planeta cobre uma área igual em qualquer lugar da sua órbita elíptica



JOHANNES KEPLER

- Lei do tempo
  - O quociente do quadrado do período orbital pelo cubo do semi-eixo maior é constante

Planeta	P (anos)	a (UA)	P^2/a^3
Mercúrio	0.24085	0.387099	1.000063
Vénus	0.61519	0.723326	1.000038
Terra	1.0000	1.000018	0.999946
Marte	1.8807	1.523638	0.999985
Júpiter	11.861	5.20248	0.999106
Saturno	29.570	9.56329	0.999725
Urano	84.746	19.2937	0.999981
Neptuno	166.57	30.2743	0.999934

UNIFICAÇÃO DE NEWTON

- 50 anos depois da morte de Galileu
- Newton virou a sua atenção para alguns dos problemas que ocuparam Galileu e Kepler
- Problemas de mecânicas terrestre e celestial
- *Principia*
- Uniu as duas mecânicas numa ciência matemática dedutiva

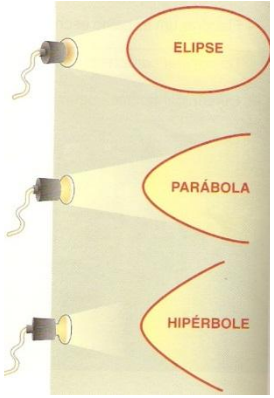
UNIFICAÇÃO DE NEWTON

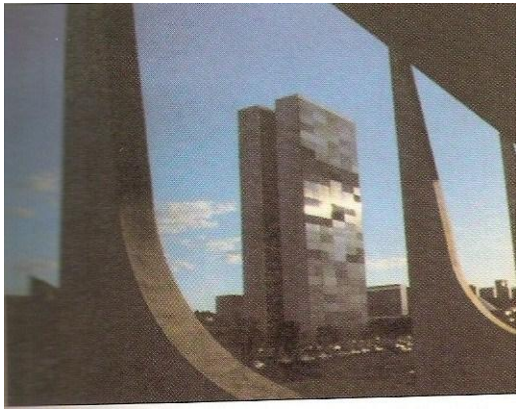
- No espírito dos *Elementos de Euclides* definiu termos como massa, força, inércia e momento
- Três leis de movimento
- Conduzindo à lei da gravidade

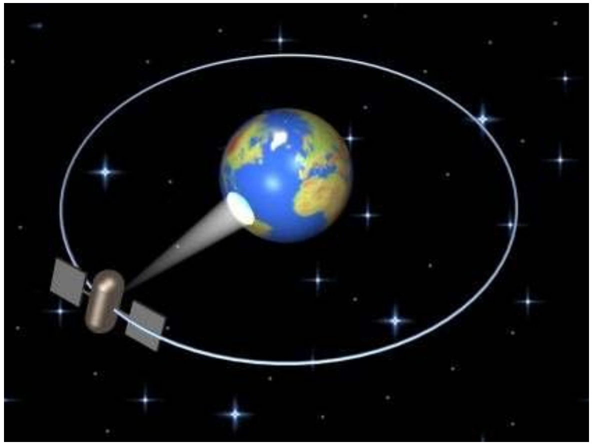
NOVAS GEOMETRIAS PARA MEDIR O UNIVERSO

- Geometria Euclidiana
- Postulado das paralelas nunca foi provado
  - Geometrias não euclidianas
  - Geometria hiperbólica
  - Geometria elíptica

- Secções cónicas desempenharam um papel fundamental na evolução da ciência
- Fundamental para o estudo da física, astronomia, arquitectura e engenharia
- Aplicações em várias vertentes do dia-a-dia



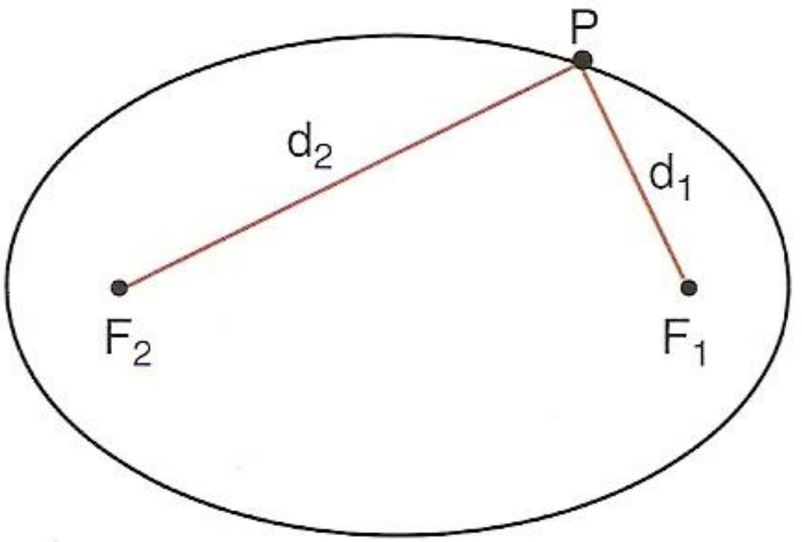




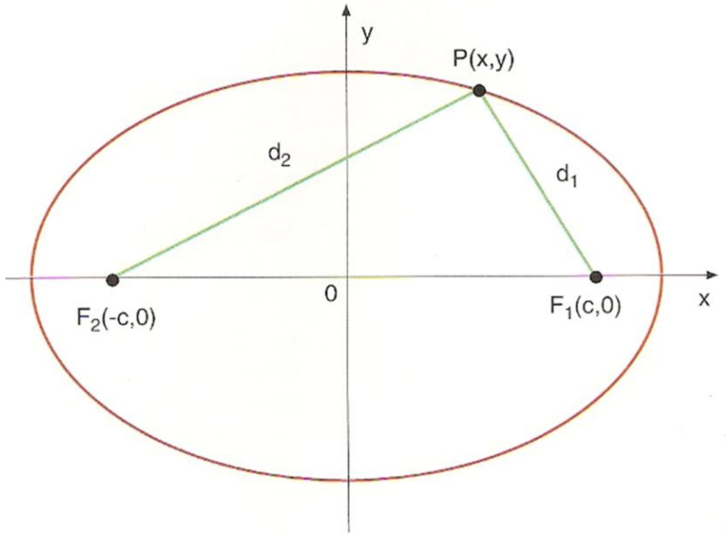
Elipses

- É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que é constante a soma das suas distâncias a dois pontos fixos, desse plano, chamado focos.

- $d_1 + d_2 = constante$;
- F_1 e F_2 são os focos;
- F_1F_2 é a distância focal;
- $[PF_1]$ e $[PF_2]$ são raios focais



- 2c é a distância entre os focos;
- P é um ponto da elipse;
- $\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$ com a constante e $a > c$;
- $F_1(c,0), F_2(-c,0), P(x,y)$
- $d_1 = \overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
- $d_2 = \overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$



- $d_1 + d_2 = 2a$

Actividade no GeoGebra

No GeoGebra:

- Construir uma elipse, colocando os focos A e B;
- Colocar um ponto sobre a elipse, D, para se poder movimentar;
- Fazer o segmento AD (renomeado por a) e o segmento BD (renomeado por b);
- Soma das distâncias é a soma dos dois segmentos é a mesma para qualquer ponto D sobre a elipse, s=a+b.

- $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$
- Isolando um radical e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos sucessivamente:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

- Voltando a elevar ambos os membros ao quadrado:

$$a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4+c^2x^2-2a^2cx$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

- Como $a > c$ podemos escrever

$$a^2 - c^2 = b^2$$

de onde resulta a equação

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

- Dividindo os dois membros por a^2b^2, obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \bigwedge b^2 = a^2 - c^2$$

que é a equação reduzida da elipse.

- Das constantes positivas a, b, c podemos afirmar que:
  - $a > c$ pela definição de elipse
  - $a > b$ visto que $a^2 - c^2 = b^2$

- $a^2 = b^2 + c^2$, logo os três números podem ser medidas dos lados de um triângulo.

Estudo analítico:

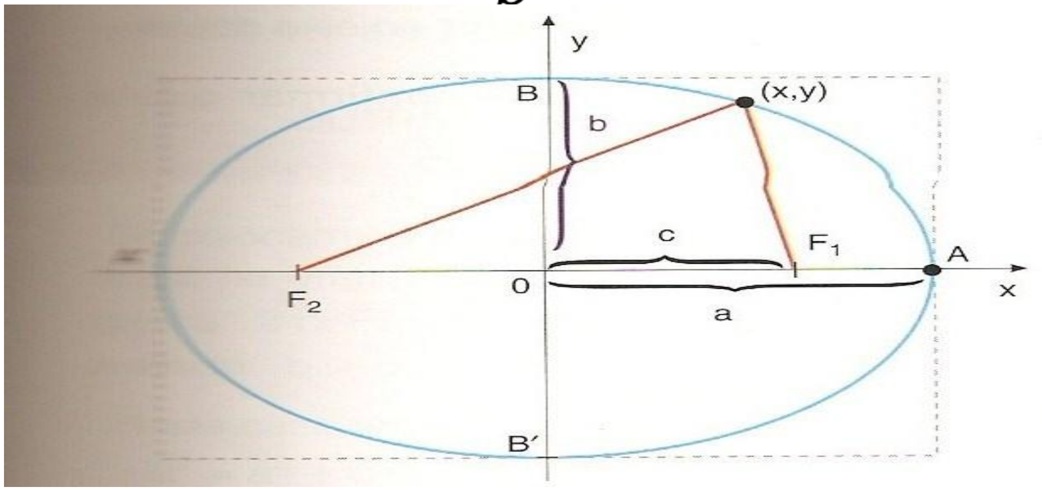
- Adopta-se um referencial ortogonal xoy tendo, por exemplo:
- A origem no ponto médio de $[F_2F_1]$
- O eixo das abcissas coincidente com F_2F_1 (orientado de F_2 para F_1)

➢ A máxima corda da elipse chama-se <u>eixo maior</u> ;
➢ À menor corda chama-se <u>eixo menor</u> .

Discussão da equação reduzida de uma elipse

- A equação reduzida é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Semi-eixo maior=a;
- Semi-eixo menor = b
- Semi-distância focal = c
- $a^2 = b^2 + c^2$
- o é o centro de simetria
- A, A', B, B' vértices

- Temos $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \vee y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (a e b positivos)

- O domínio é dado por $x^2 \leq a^2$, ou seja,

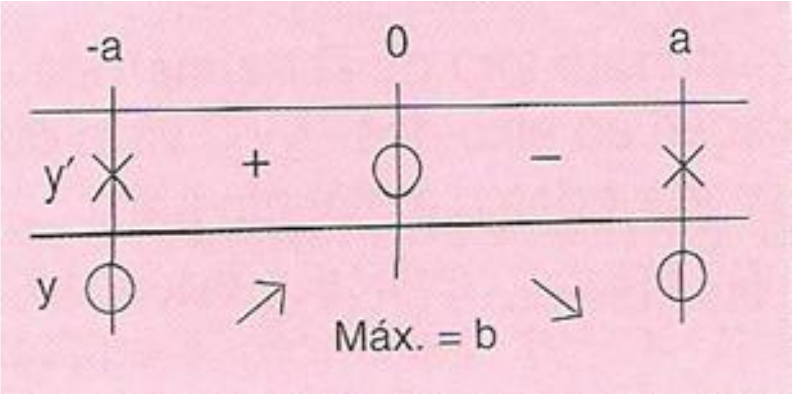
$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

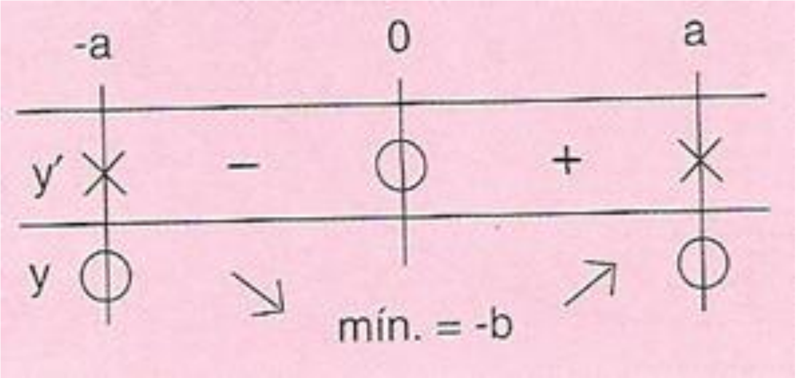
Domínio = [-a,a] (a positivo)

- Para $x = \pm a$ vem $y = 0$ $\Rightarrow$ elipse passam em $(a, 0)$ e $(-a, 0)$.
- As expressões $\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ definem funções contínuas no seu domínio
- A elipse é uma linha contínua e fechada cujo eixo maior mede 2a.
- A expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ toma o máximo valor para $x = 0$ de onde $y = b$ e $y = -b$
- A elipse passa em $(0, b)$ e $(0, -b)$ e que o eixo menor da elipse mede 2b.

Estudo da monotonia:

- $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$;
- $y' = \frac{b}{a} \times \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;
- $y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} < 0$
- $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$
- $y' = \frac{b}{a} \times \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$





Excentricidade

- A excentricidade de uma elipse é o quociente da distância focal pelo eixo maior:

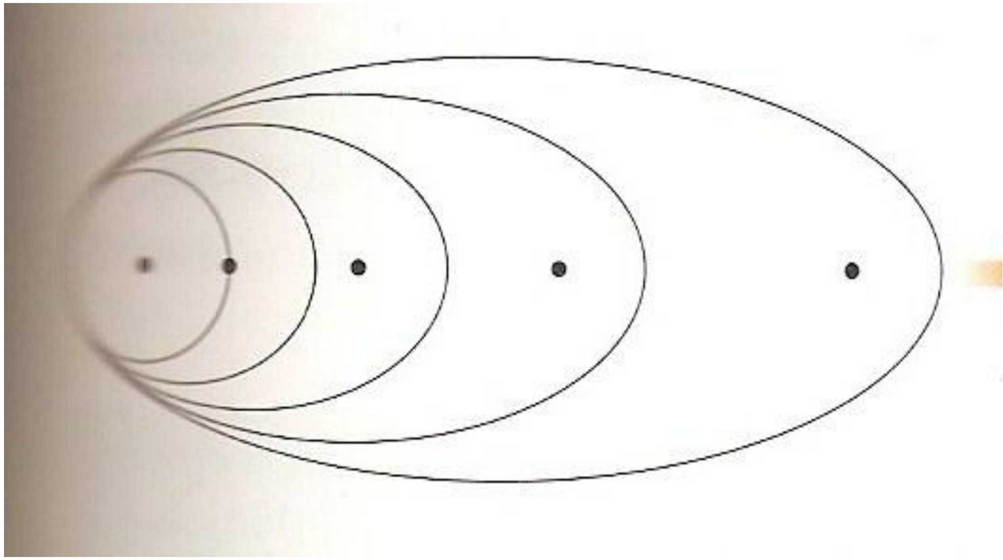
$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

- $c < a \Longrightarrow \mathrm{e} < 1$

Caso particular

- Se o eixo maior da elipse for igual ao eixo menor, então a elipse é uma circunferência.
- Nesse caso $a = b$ logo $c = 0$, ou seja, a distância focal é nula e os dois focos estão coincidentes com o centro da circunferência.
- Numa circunferência, a excentricidade é nula visto que $\frac{c}{a} = 0$.

- Quanto maior é a excentricidade de uma elipse (mais perto de 1), mais alongada é a curva e portanto mais se afasta da forma da circunferência:



- Quando $e \to 1$, a elipse tende para um segmento de recta com os focos nos extremos.

Outra forma de escolher o referencial:

Elipse com eixo maior vertical

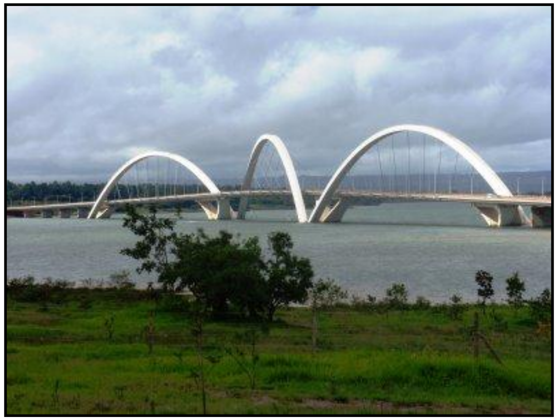
- Se colocarmos os focos sobre o eixo das ordenadas e o centro da elipse na origem, temos sucessivamente:
  - $\overline{F_1F_2} = 2c$; eixo maior igual a $2b$
  - $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$, sendo P um ponto qualquer de elipse e sendo $b > c$.
- Neste caso tem-se

$$b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2$$

- A excentricidade é dada por $e = \frac{c}{b} < 1$. A equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a)$$

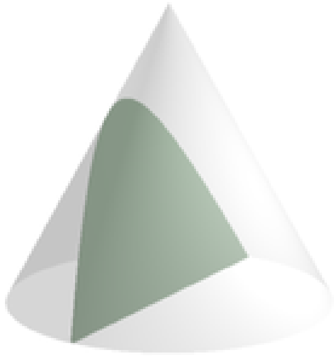
Parábolas



Parábolas

Definição do dicionário:

Curva plana, cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma recta fixa (directriz) ou curva resultante de uma secção feita num cone por um plano paralelo à geratriz.



Parábolas

Definição matemática:

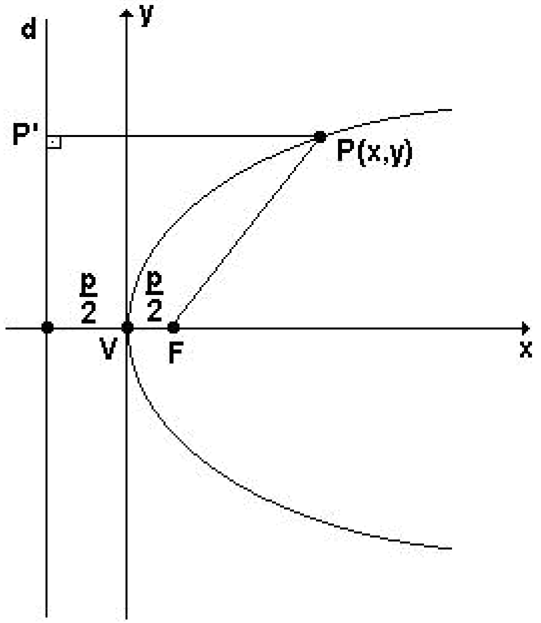
Considere no plano cartesiano xOy, uma recta d (directriz) e um ponto fixo F (foco) pertencente ao eixo das abcissas (eixo dos xx), conforme figura ao lado.

Denominaremos **PARÁBOLA**, à curva plana formada pelos pontos P(x,y) do plano cartesiano, tais que

PF = Pd onde:

PF = distância entre os pontos P e F

PP' = distância entre o ponto P e a recta d (directriz).



Importante: Temos portanto, a seguinte relação notável:

VF = p/2

Actividade no GeoGebra

No GeoGebra:

- Desenha-se o ponto A;
- Desenha-se uma recta directriz que passa pelo ponto B e pelo ponto C, a recta a;
- Construir uma parábola com foco em A;
- Desenha-se um ponto D sobre a parábola;
- Desenha-se a recta perpendicular à recta directriz que passa por D, a recta b;
- Encontra-se o ponto E, de intersecção entre as duas rectas a e b;
- Traçar o segmento DE, o segmento d;
- Depois o segmento DA, o segmento e;
- Oculta-se a recta b;
- Movimenta-se o ponto D sobre a parábola e verifica-se que a distância dos segmento d e e têm a mesma medida de comprimento.

Parábolas

<u>Equação reduzida da parábola de eixo horizontal e vértice na origem:</u>

Observando a figura acima, consideremos os pontos:
F(p/2, 0) o foco da parábola, e P(x,y) - um ponto qualquer da parábola. Considerando-se a definição acima, deveremos ter:
PF = PP'
Daí, vem, usando a fórmula da distância entre pontos do plano cartesiano:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$$

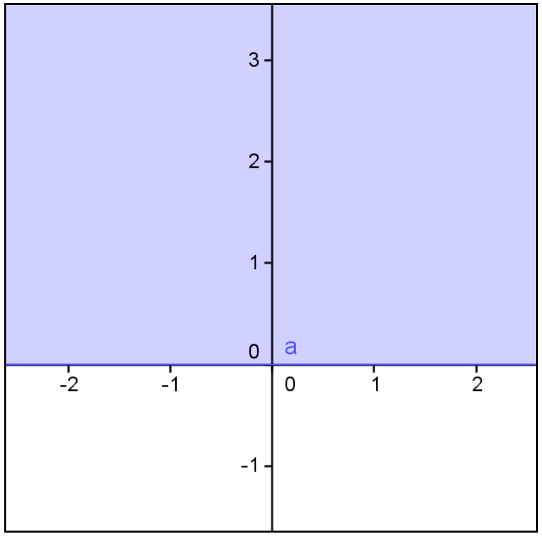
Parábolas

Desenvolvendo convenientemente e simplificando a expressão acima, chegaremos à equação reduzida da parábola de eixo horizontal e vértice na origem, a saber: $\mathbf{y^2 = 2px}$ onde p é a medida do ***parâmetro*** da parábola.

Parábolas - Função quadrática

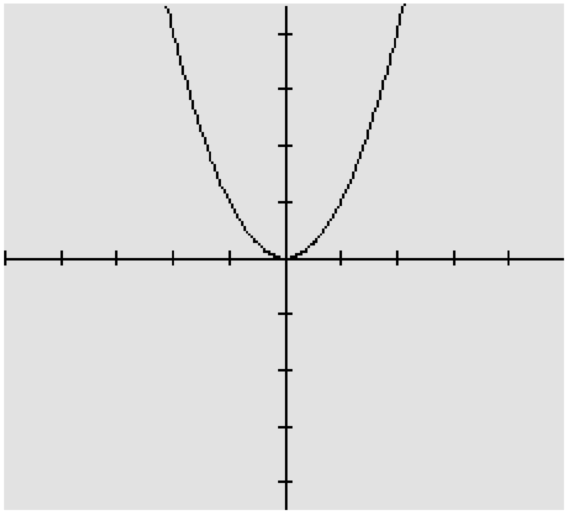
Consideremos a função $f(x)= x^2$.

- D= R
- $f(x) \geq 0$
- a função quadrática vai encontrar-se na zona colorida
- $f(0)=0^2=0$
- contradomínio é R_0^+
- mínimo da função é zero.



Parábolas – Função quadrática

A função $f(x)=x^2$ representa uma curva chamada parábola



Neste caso o vértice da parábola é o ponto (0,0).

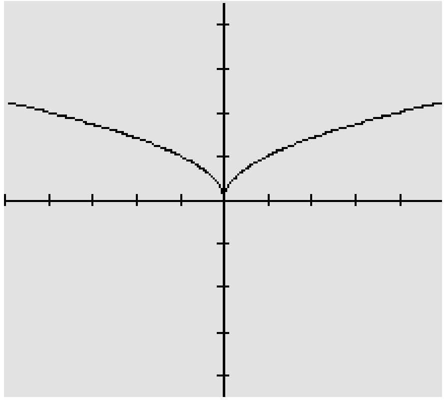
Números simétricos têm o mesmo quadrado, logo

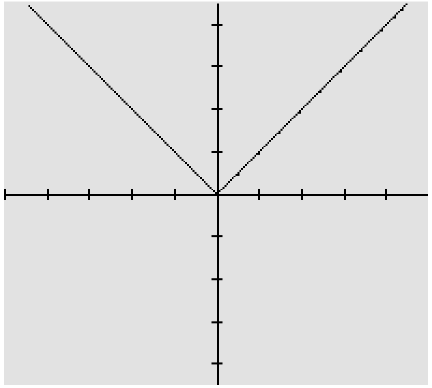
$$f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x),$$

para todo o $x \in R$, é uma função par.

Parábolas – Função quadrática

A nível gráfico vê-se que uma função é par quando o gráfico dessa mesma função é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (eixo yy).





<u>Definição de função par:</u>

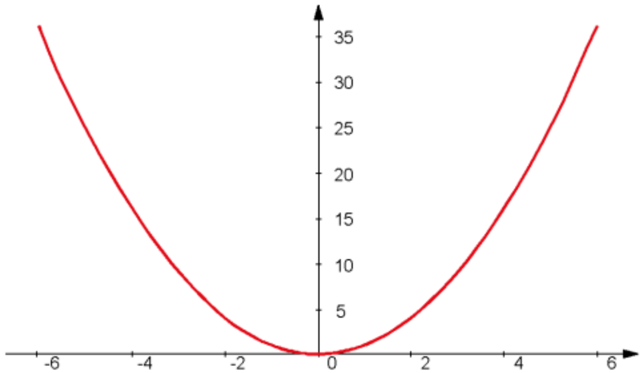
Uma função f é denominada par quando f(x)=f(-x), para todo x do Domf.

Parábolas – Função quadrática

Gráfico de uma parábola:

Observando o gráfico de $y = x^2$, concluímos ainda que:

- f é crescente no intervalo $[0, +\infty[$, ou seja, sendo a e b números reais positivos tais que $a < b$, então $a^2 < b^2$;
- f é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$, ou seja, sendo a e b números reais negativos tais que $a < b$, então $a^2 > b^2$;
- o gráfico desta função de domínio R é uma "linha contínua", o que nos sugere que é uma função contínua no seu domínio.



Parábolas - Função quadrática

Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \in R\backslash\{0\}$:

Podemos analisar várias parábolas para ver as diferenças entre elas.

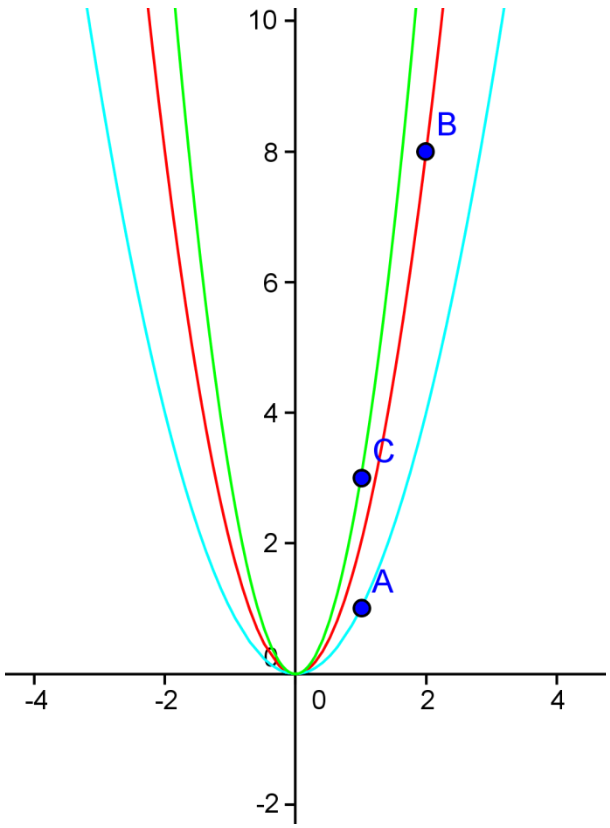
Para $a \geq 1$ teremos por exemplo:

- $y = x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = 3x^2$

e obteremos os seguintes dados e respectivos gráficos.

Parábolas - Função quadrática

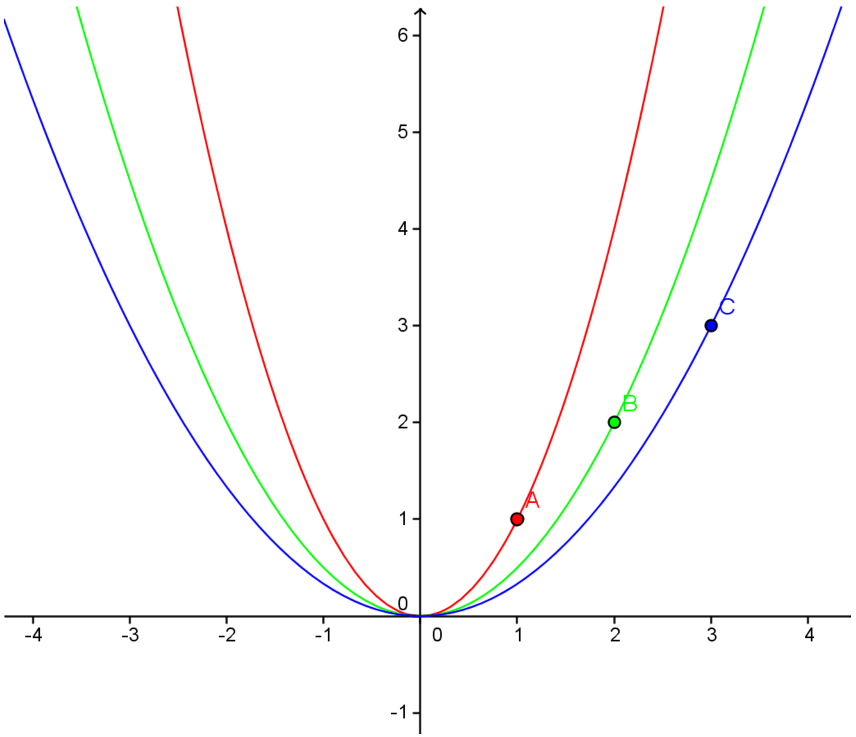
x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = 3x^2$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27
4	16	32	48
5	25	50	75
6	36	72	108



Parábolas - Função quadrática

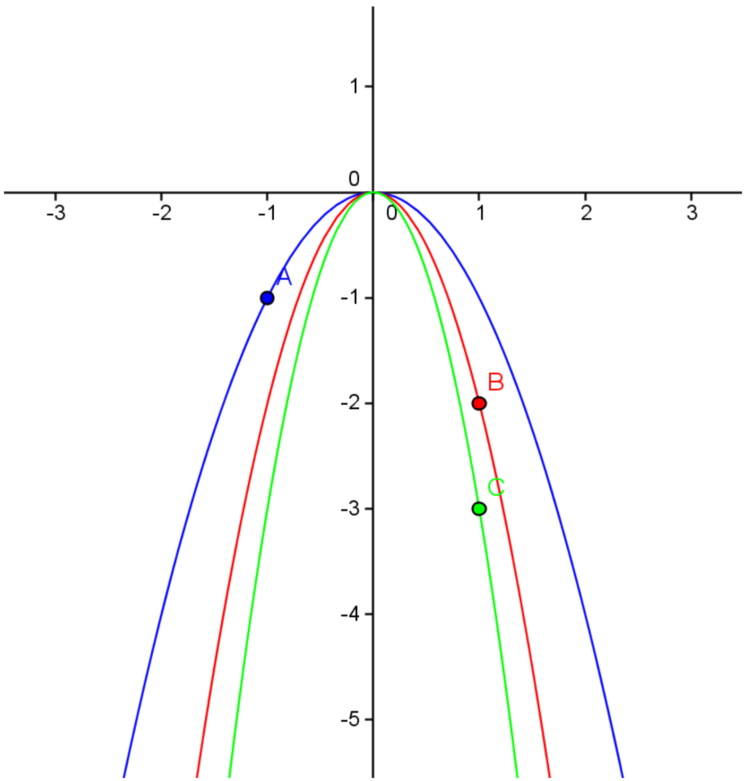
Para 0 < a ≤ 1 podemos obter os seguintes valores e gráficos:

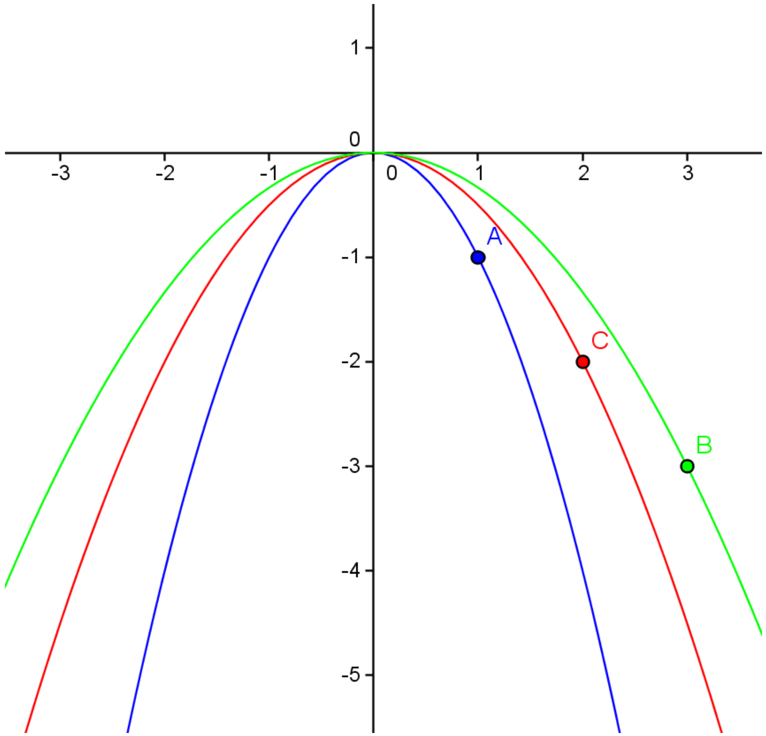
x	$y = x^2$	$y = (1/2)x^2$	$y = (1/3)x^2$
-3	9	4,5	3
-2	4	2	1,33
-1	1	0,5	0,33
0	0	0	0
1	1	0,5	0,33
2	4	2	1,33
3	9	4,5	3



Parábolas - Função quadrática

Para a < 0 iremos obter as seguintes parábolas:





Parábolas – Função quadrática

- Se $a < 0$, a concavidade é virada para baixo;
- Se $a > 0$, a concavidade é virada para cima;
- Se $|a| > 1$, a parábola é mais estreita;
- Se $0 < |a| < 1$, , a parábola é mais larga

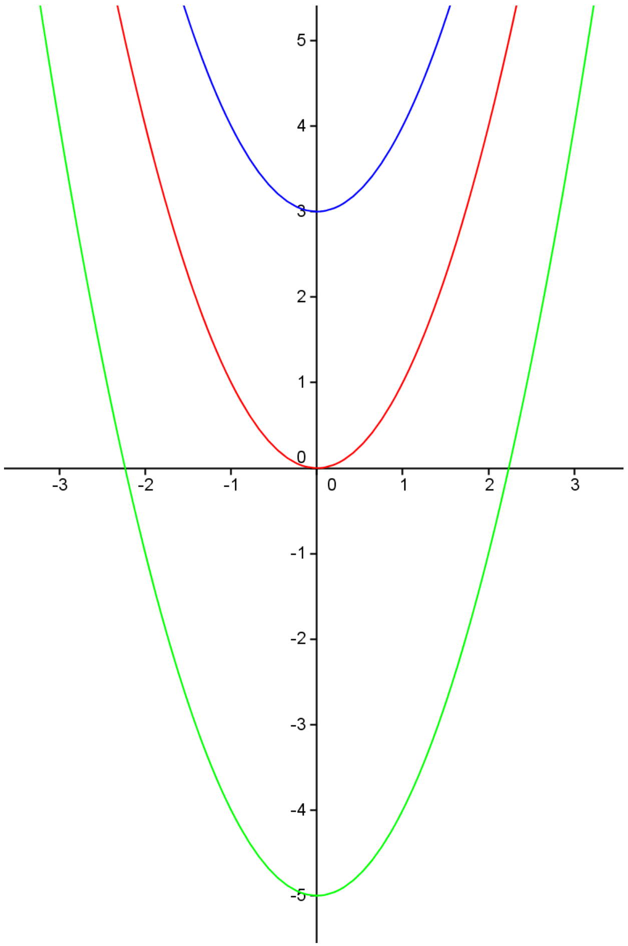
Parábolas - Função quadrática

$y_1 = x^2$

$y_2 = x^2 + 3$

$y_3 = x^2 - 5$

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^2 + 3$	$y_3 = x^2 - 5$
-3	9	12	4
-2	4	7	-1
-1	1	4	-4
0	0	3	-5
1	1	4	-4
2	4	7	-1
3	9	12	4

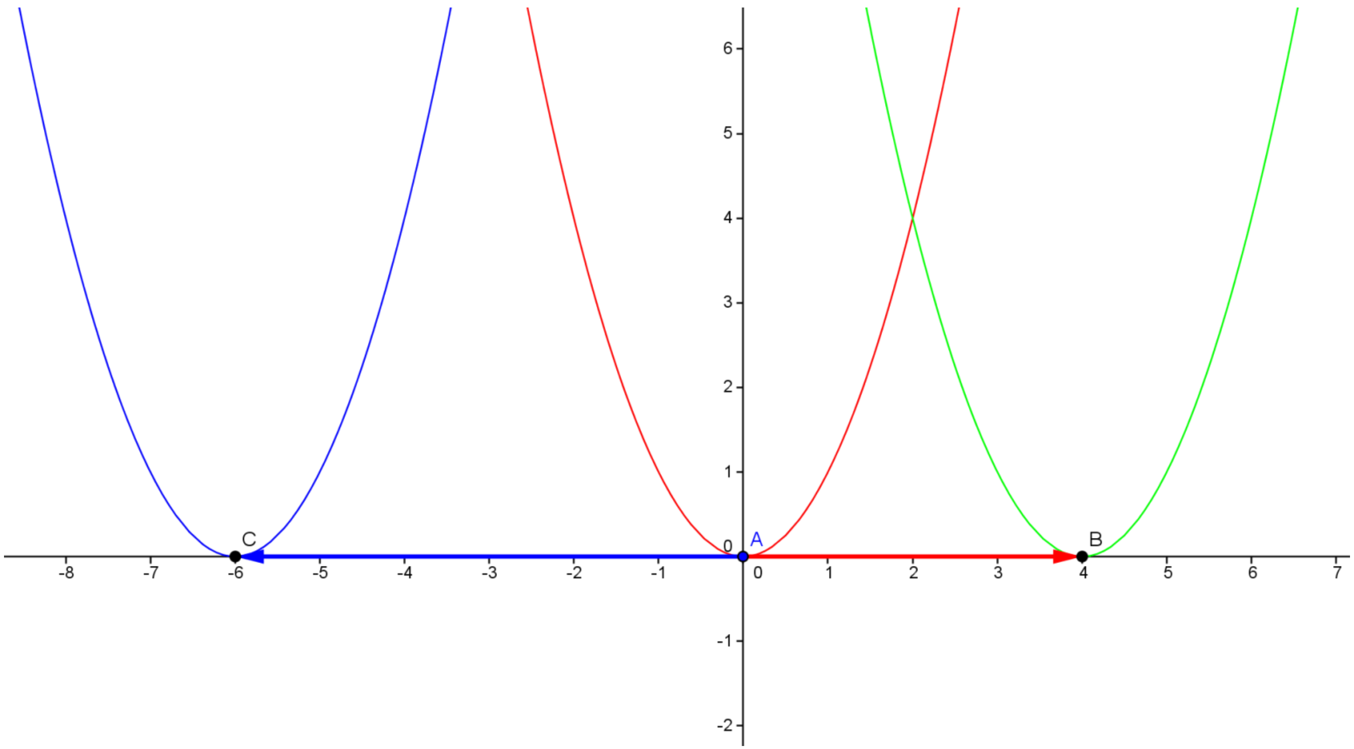


Parábolas – Função quadrática

$y_1 = x^2$

$y_4 = (x - 4)^2$

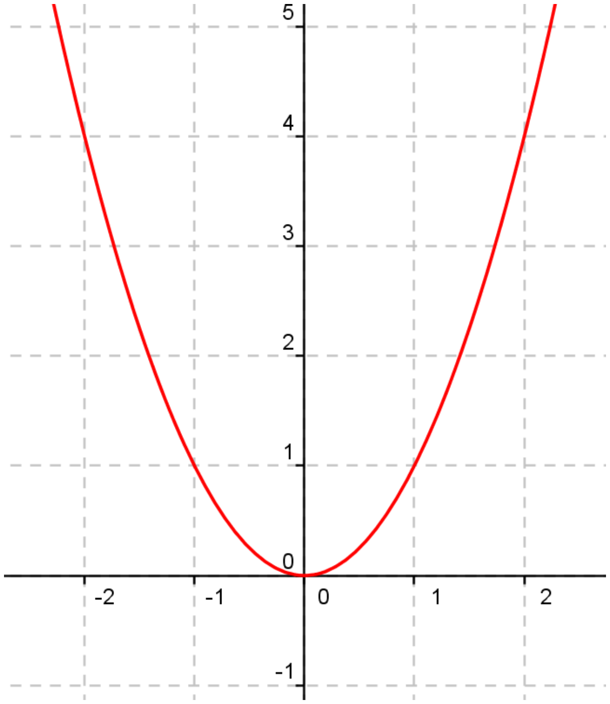
$y_5 = (x + 6)^2$



Parábolas - Função quadrática

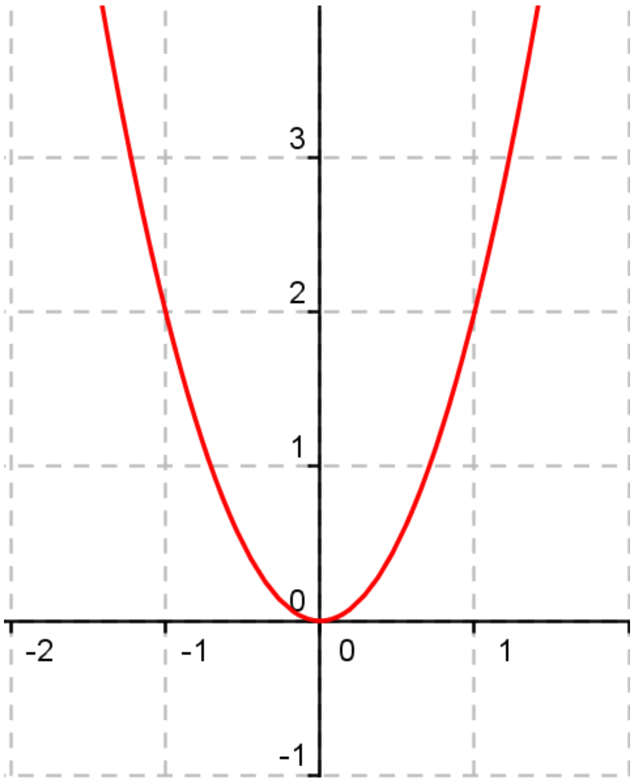
Partindo de $y = x^2$ vamos chegar à função $y = -2(x-4)^2 - 1$.

1º Passo: Desenhar a função $y = x^2$.



Parábolas – Função quadrática

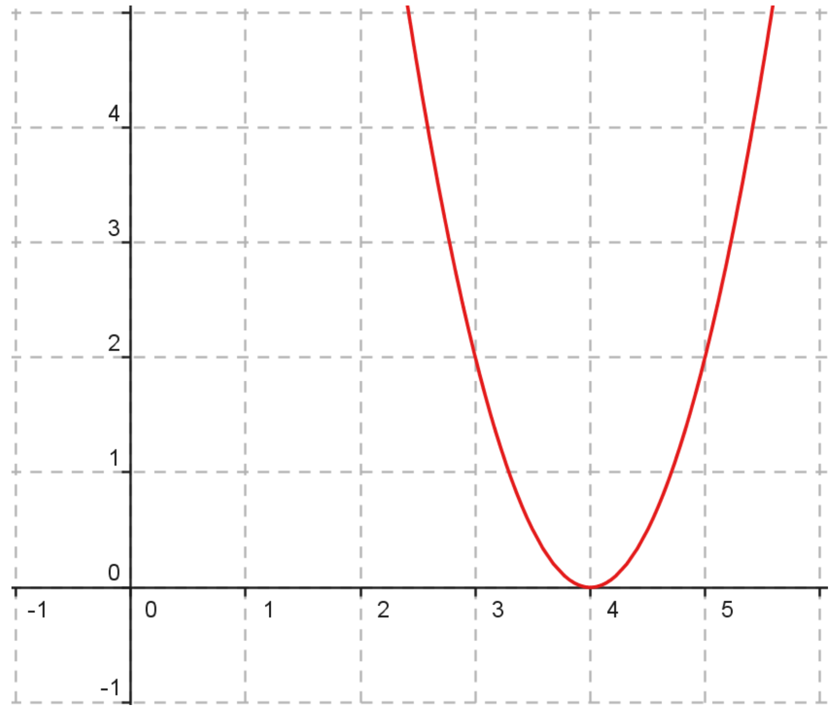
2º Passo: Multiplicar a função anterior por 2 para obter a função **$y = 2x^2$**.



Parábolas - Função quadrática

3º Passo: Fazer a translação associada ao vector de coordenadas (4,0). A parábola vai deslocar-se 4 unidades para a direita. Obtemos assim a função

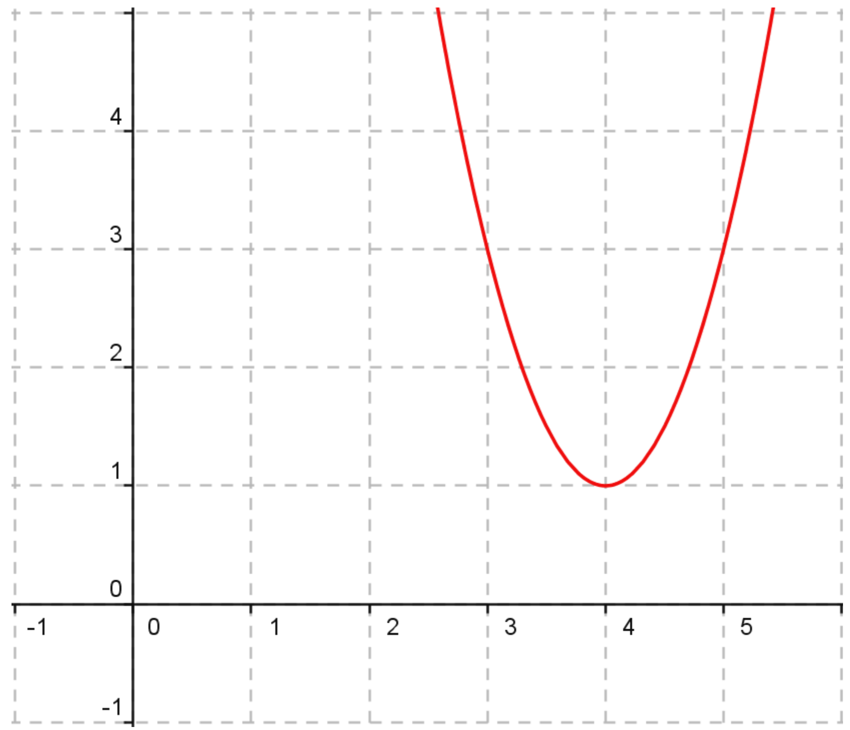
$$y = 2(x - 4)^2$$



Parábolas - Função quadrática

4º Passo: Fazer a translação associada ao vector de coordenadas (0,1). A parábola vai deslocar-se 1 unidade para a cima. Obtemos assim a função

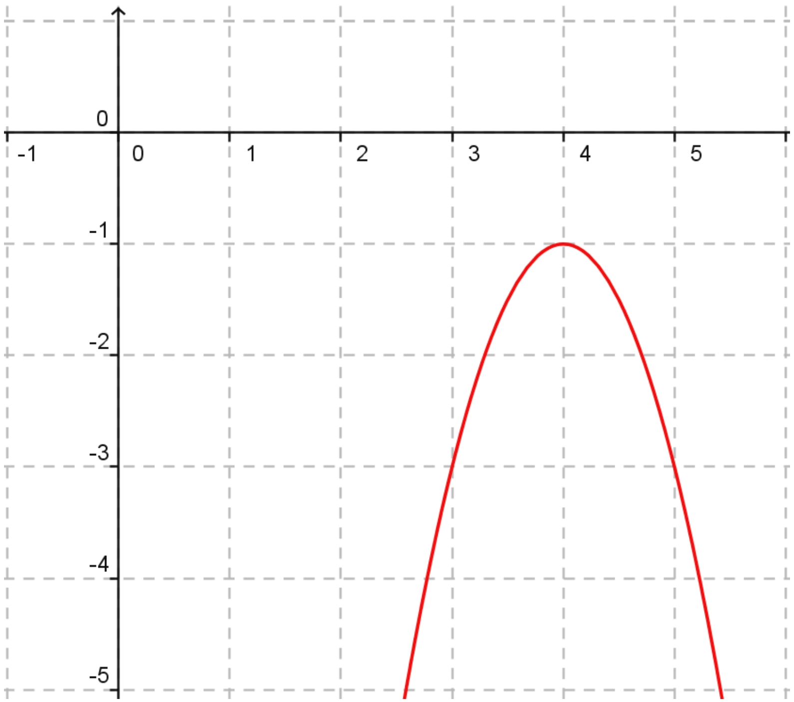
$$y = 2(x - 4)^2 + 1$$



Parábolas – Função quadrática

5ºPasso: Por último basta fazer a simetria da parábola que temos neste momento em relação ao eixo das abcissas (eixo dos xx), para obtermos finalmente o gráfico da função

$$y = -2(x-4)^2 - 1$$



Parábolas – Função quadrática

Numa função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, sendo a, b, c ϵ R

- Quais serão as coordenadas do vértice da parábola?
- E qual é o seu eixo de simetria?

Vejamos:

Os pontos em que a curva intersecta a recta y = c, obtêm-se resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a + bx) = 0 \\ y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee x = -\dfrac{b}{a} \\ y = c \end{cases}$$

Parábolas - Função quadrática

As soluções são 0 e $-\dfrac{b}{a}$

A abcissa do vértice é o valor médio entre 0 e $-\dfrac{b}{a}$

Vem então:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Parábolas – Função quadrática

Assim, se considerarmos $f\,(x) = ax^2 + bx + c$, as coordenadas do vértice da parábola são

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

e o eixo de simetria da parábola é a recta $x = -\dfrac{b}{a}$

Parábolas - Função quadrática

Exemplo:

Obtenção do vértice da parábola de equação

$y = -x^2 + 8x - 20$.

Resolução:

Os pontos de intersecção d recta y = - 20 com a parábola têm de abcissa as soluções da equação

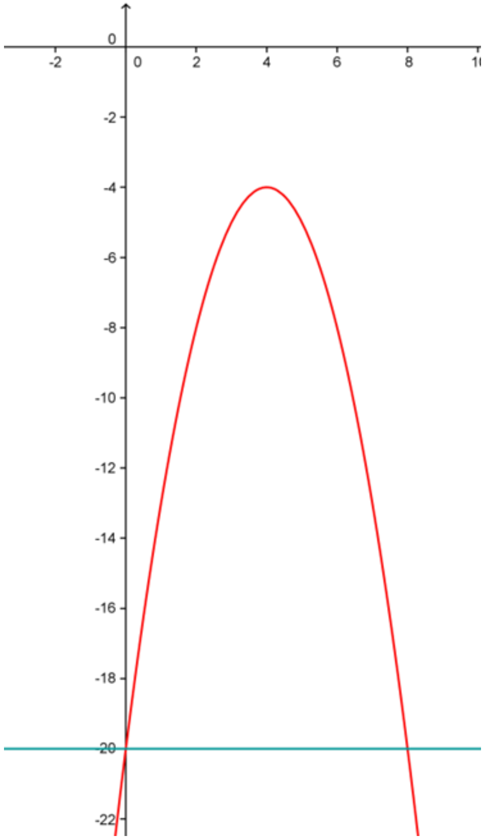
$x^2 + 8x - 20 = -20 \Leftrightarrow -x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 8$

O vértice tem portanto abcissa 4.

Depois de conhecida a abcissa basta substituir na equação o valor de x e encontra-se o valor de y.

Neste caso o vértice vai ser (4,-4).



Parábolas - Função quadrática

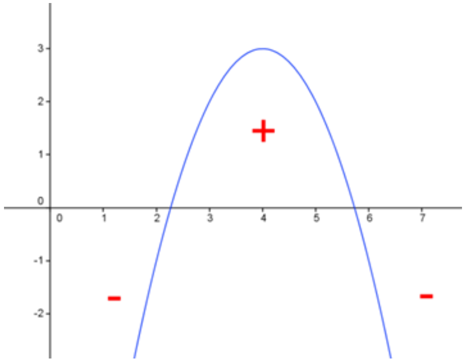
Sinal da função quadrática:

$\Delta = b2 - 4ac$

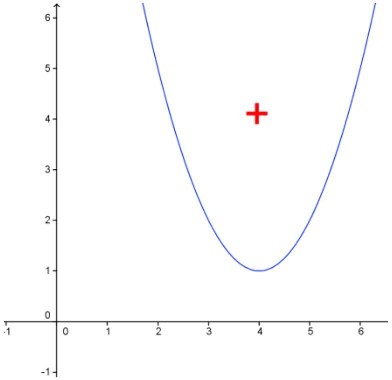
- se $\Delta > 0$, a função tem dois zeros e o gráfico tem uma parte positiva e outra negativa;
- se $\Delta = 0$, a função tem um zero e o gráfico está situado "acima" do eixo do xx ou "abaixo" do eixo dos xx, interceptando-o apenas num ponto que será o seu vértice;
- se $\Delta < 0$ a função não tem zeros e o seu gráfico está "acima" ou "abaixo" do eixo dos xx.

Parábolas – Função quadrática

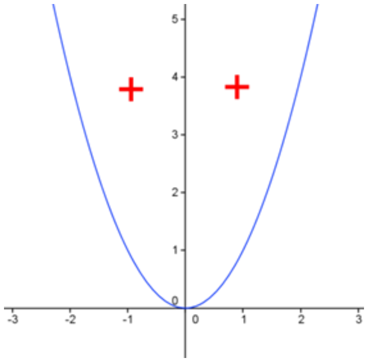
Caso 1:



Caso 3:

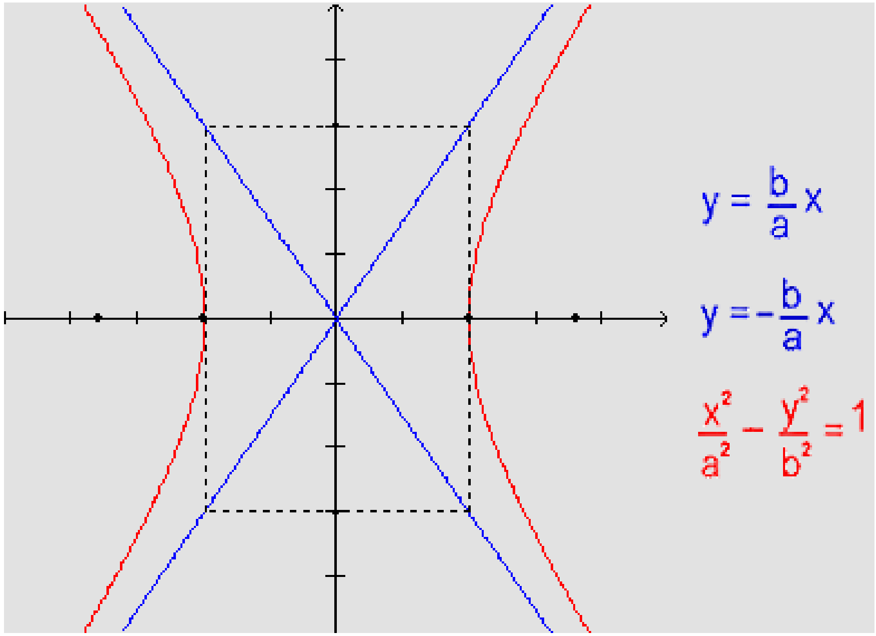


Caso 2:

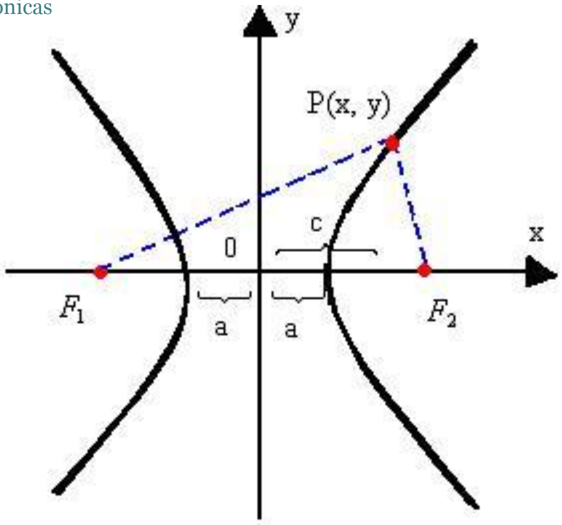


Hipérboles

- É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que é constante a diferença, em módulo, das suas distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados focos.
- Essa constante tem de ser inferior à distância entre os focos.



Definição



- $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$=constante
- F_1 e F_2 são os focos
- $\overline{F_1F_2}$ = distância focal
- $[PF_1]$ e $[PF_2]$ são raios focais
- A hipérbole é formada por dois ramos
- O eixo das abcissas normalmente é a recta F_1F_2, orientada de F_2 para F_1
- O eixo das ordenadas é a mediatriz de $[F_2F_1]$

Actividade no GeoGebra

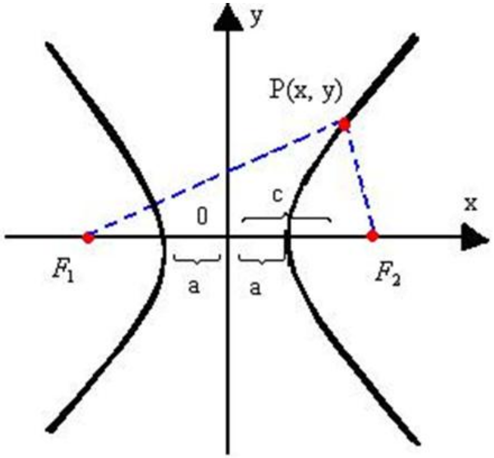
No GeoGebra:

- Construir uma hipérbole, colocando os focos A e B;
- Colocar um ponto D (por exemplo, ramo do lado direito) para se pode movimentar;
- Constrói-se os segmentos AD (renomeado por segmento a) e BD (renomeado por segmento b);
- Subtracção das distâncias é a diferença dos dois segmentos é a mesma para qualquer ponto D no mesmo ramo da hipérbole, d=a-b.

Recordar…

- $|d_1 - d_2| = 2a$, a constante,0< a<c
- Origem em O=(0,0)
- $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$
- $2c$ é a distância focal
- Seja P=(x , y) um ponto da hipérbole

d_1=F_1- O e d_2=F_2- O



- $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = \pm 2a$

(Fórmula da Distância)

- Consideremos um referencial ortonormado, de modo que seja $F_1=(c, 0)$ e $F_2=(-c, 0)$, sendo 2c a distância focal.
- Seja P (x,y) um ponto genérico da hipérbole e seja $0<a<c$.
- Por definição, $|d_1 - d_2| = 2a$, donde,

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$, condição que define a hipérbole.

- Isolando o primeiro radical,

$$\sqrt{(x+c)^2+\ y^2}=\pm\,2a+\ \sqrt{(x-c)^2+\ y^2}$$

- E quadrando ambos os membros,

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+\ y^2}\right)^2=\left(\pm\,2a+\ \sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\right)^2$$

- Obtém-se,

$$(x+c)^2+\ y^2$$
$$=4a^2\ \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+(x-c)^2+\ y^2$$

- E simplificando,

$$(x+c)^2=4a^2\ \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+(x-c)^2$$

- Desenvolvendo os quadrados dos binómios e simplificando e dividindo tudo por 4 dá,

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

- Quadrando novamente obtém-se,

$$(xc - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

- Ou seja,

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

- Como 0<a<c, a expressão $c^2 - a^2 > 0$, logo pode-se fazer $c^2 - a^2 = b^2$ e a equação transforma-se na condição equivalente,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \bigwedge b^2 = c^2 - a^2$$

- Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \bigwedge b^2 = c^2 - a^2$$

- Das constantes $a>0$, $b>0$, $c>0$ que c é a semi-distância focal, que $a<c$ por definição, que $b<c$ por construção e que $c^2 = a^2 + b^2$, logo podem ser medidas de lados de um triângulo retângulo.

Discussão da equação reduzida de uma hipérbole:

- A equação reduzida é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- P=(x,y) $\Rightarrow$ (-x,y), (x, -y) e (-x,-y) também pertencem à cónica;
- A curva é a reunião de dois ramos, é simétrica em relação à origem.

- Exprimindo y em função de x, obtém-se,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \bigvee y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

- Logo a hipérbole é a reunião dos gráficos destas duas funções.
- Quando $y \geq 0$, logo o gráfico correspondente é a parte da hipérbole situada a cima do eixo dos XX.
- A outra equação define a parte da hipérbole abaixo do eixo dos XX.

- O domínio de qualquer uma destas funções é dado por,

$$x^2 \geq a^2 <=> |x| \geq |a|$$
$$<=> x \geq a \lor x \leq -a \quad (a > 0)$$

$$D =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

- Não pode haver pontos da hipérbole entre as rectas x=-a e x=a;
- A hipérbole não intersecta o eixo das ordenadas.

- Para $x = \pm a$ vem y=0 → cortam o eixo das abcissas por pontos V_1=(a,0) e V_2=(-a,0), chamados vértices da hipérbole;
- As expressões $\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ definem funções contínuas no seu domínio;
- A medida do comprimento de $[V_1V_2]$ eixo transverso da hipérbole, $|d_1 - d_2| = 2a$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = -\infty$ logo qualquer dos ramos da hipérbole é uma linha aberta.

- Informações dadas pelas derivadas:

De $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, vem $y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ e $y'' = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} < 0$

Estudo da Monotonia:

- 1ª derivada é positiva, a função é crescente;
- 1ª derivada é negativa, a função é decrescente;
- 2ª derivada ao ser negativa mostra que a concavidade é voltada para baixo;
- Por simetria em relação ao eixo das abcissas traçado dos dois meios ramos inferiores;
- A interpretação geométrica do valor de b resulta da relação $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras) aplicado ao triângulo tracejado na figura;
- O segmento $[B_1B_2]$ é o "eixo não transverso";
- A medida de $\overline{B_1B_2}$, que é 2b, designa-se por "eixo não transverso",

$$B_1=(0,b) \text{ e } B_2=(0,-b).$$

Assimptotas:

- A curva não tem assimptotas verticais, mas tem assimptotas oblíquas;
- Estuda-se a função definida por,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ quando } x \to +\infty$$

- Declive da assimptota:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}$$

- Ordenada na origem da assimptota:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right]$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right] = \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right] = 0$$

- Então,

$$y = \frac{b}{a}x$$

Agora quando $x \to -\infty$, nota que $x = -\sqrt{x^2}$

- Declive da assimptota:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to-\infty} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2}} = - \frac{b}{a}$$

- Ordenada na origem da assimptota:

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x\right] = \frac{b}{a} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = 0$$

- Logo, $y = -\frac{b}{a} x$.

- Trabalha-se com a função definida por $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ e encontra-se a assimptota $y = \frac{b}{a} x$, quando $x \to -\infty$, e $y = -\frac{b}{a} x$ quando $x \to +\infty$.

- Conhecendo a e c, é muito fácil construir as assimptotas, basta cortar as rectas x=a e x=-a por um arco de centro O e raio c.
- Os pontos (a,b) e (-a,b), pertencem à assimptota $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ respectivamente.

Excentricidade da Hipérbole:

- É o quociente da distância focal pelo eixo transverso.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \text{ e>1.}$$

- Quanto maior é a excentricidade maior é a "abertura" dos ramos da hipérbole;
- c>a⟹e>1
- No caso limite $e \to 1$ logo $2a \to 2c$, ou seja, o valor $|d_1 - d_2| \to \overline{F_1 F_2}$.
- A hipérbole degenera então em duas semi-rectas, de sentidos opostos, uma com origem em F_1, outra em F_2.

- Se a=b (semieixo transverso igual ao não transverso) chama-se **hipérbole equilátera**. Aqui, os declives das assimptotas são $\pm\frac{b}{a}$, a hipérbole equilátera tem por assimptotas rectas perpendiculares de declive +1 e -1, ou seja, as bissectrizes dos quadrantes, caso a hipérbole tenha o centro na origem.

- A equação reduzida desta hipérbole equilátera é,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

- Ou seja,

$x^2 - y^2 = a^2$, onde a é o semieixo transverso.

- Sendo $c^2 = a^2 + b^2$ vem $c^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 2.$
- Logo, a excentricidade duma hipérbole equilátera é $\sqrt{2} = 1.414 \ldots.$

Trabalho Elaborado Por:

- Alexandra Resende
- Andreia Videira
- Diogo Silva
- Tânia Lopes