MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA B

12º ANO

Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais[1]
Cursos Tecnológicos de Construção Civil e Edificações, de Electrotecnia e Electrónica, de Informática, de Administração, de Marketing e de Desporto

Autores
Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)
Maria Graziela Fonseca
Arsélio Almeida Martins
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca
Ilda Maria Couto Lopes

Homologação

17/05/2002

[1] Consultar Ofício-Circular nº 19 de 23/06/2004

Matemática B

Programa do 12º Ano

Cursos Tecnológicos de:
Construção Civil, Electrotecnia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos.

Desenvolvimento dos temas a abordar e respectivas indicações metodológicas

Tema I — Modelos de Probabilidade

14 aulas de 90 minutos

Todos os dias somos confrontados com situações que nos conduzem a utilizar, intuitivamente, a noção de probabilidade. Nos mais variados aspectos da nossa vida está presente a incerteza: no jogo (totoloto, totobola,...), na probabilidade de chover ou fazer sol, na probabilidade de sucesso de um certo produto que se pretende lançar no mercado, ... As noções de probabilidade devem fazer parte da formação de um cidadão para que ele se possa integrar nas sociedades actuais onde a incerteza e a aleatoriedade são noções usadas frequentemente. Os conteúdos a abordar neste tema devem ser apresentados aos estudantes depois de estes terem sido confrontados com actividades próprias do dia-a-dia de qualquer pessoa, associadas a este tema, como por exemplo: jogos, inquéritos, extracções com reposição e sem reposição de bolas de uma urna, lançamento de moedas, de dados, ...
Pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para estudar fenómenos aleatórios;
- comprender as aproximações conceptuais para a probabilidade:
  - aproximação frequencista de probabilidade;
  - definição clássica ou probabilidade de Laplace ;
- construir modelos de probabilidade em situações simples e usá-los para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos;
- apreender as propriedades básicas das distribuições de probabilidade;
- resolver problemas simples, recorrendo à calculadora gráfica ou computador, envolvendo distribuições de probabilidade, em particular envolvendo a distribuição normal.

A base da aprendizagem deve estar na experimentação — recorrendo a materiais manipuláveis ou simulações — e na resolução de problemas. Ao modelarem situações, os estudantes são conduzidos a construírem o espaço de resultados de uma experiência aleatória e a definirem acontecimentos. Os estudantes poderão usar simulações para construir empiricamente distribuições de probabilidades e utilizar a noção frequencista de probabilidade comparando resultados de simulações para predizer valores da probabilidade de um acontecimento. Sugere-se a consulta da *"Actividade – Exemplo de como organizar uma experiência na sala de aula"* (Brochura de Probabilidades, pág 36).
A definição de Laplace de probabilidade deve ser apresentada depois de serem criadas condições para se sentir a sua necessidade.
Através da apresentação de uma tarefa (como por exemplo, *"Jogo dos dois dados"* da Brochura de probabilidades, pág 44) e depois de ter sido abordada experimentalmente a noção de probabilidade de um acontecimento, os estudantes podem sentir dificuldades naturais. É esse o melhor modo de perceber o interesse de alguns resultados teóricos.
Não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório.
É importante que os estudantes sejam capazes de estimar probabilidades de acontecimentos através da análise de um histograma. Recorrendo à calculadora ou ao computador, podem determinar a média e o desvio-padrão de uma distribuição.

Tema II – Modelos discretos
Sucessões

14 aulas de 90 minutos

Introdução às sucessões

Pretende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de modelar e resolver situações envolvendo sequências numéricas.
Modelos de crescimento linear ou não linear podem resultar da abordagem de situações realistas.
A folha de cálculo pode ser utilizada como meio de organizar os dados e realizar os cálculos necessários para resolver problemas apresentados, mas também como meio eficaz de estudar os efeitos da alteração de dados iniciais numa sequência de cálculos. O trabalho com a folha de cálculo na procura de soluções e na descoberta dos efeitos desta ou daquela mudança é por si só uma aprendizagem importante para os estudantes dos cursos tecnológicos. Os estudantes podem também aprender a gerar os termos de uma sequência na modelação ou estudo de situações reais. É aconselhável a visualização dos gráficos correspondentes às situações criadas e geridas a partir de listas de dados na folha de cálculo.

Algumas das situações previstas para utilizar a folha de cálculo podem também ser abordadas usando a calculadora gráfica.
Pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
- usar uma folha de cálculo para trabalhar numérica e graficamente com sucessões.

Progressões

As situações apresentadas neste tema podem ser de crescimento linear e introduzir as progressões aritméticas e podem ser de crescimento exponencial e servir de motivo para a abordagem das progressões geométricas. Podem ainda ser apresentadas situações para outros tipos de crescimento.
Os estudantes encontrarão o poder das exponenciais explorando problemas clássicos tais como *"os grãos de milho no tabuleiro de xadrez"*, *"evolução de um capital sofrendo juros simples ou acumulados"*, *"crescimento de uma população"*,.... Outros problemas do tipo de *"a geração de coelhos de Fibonacci"*, *"sequências de números (números triangulares, quadrangulares,...)"* ou equivalentes vão permitir encontrar o conceito de sucessão e as diferentes formas de as definir (incluindo o método recursivo), bem como interessantes representações gráficas.
Os estudantes perante experiências de modelação de crescimentos devem compreender e estabelecer as diferenças entre as relações aditivas $a_{n+1} = a_n + r$ e as multiplicativas $a_{n+1} = a_n \times r$ e a sua correspondência com as expressões $y = ax + b$ e $y = ab^x$.

Pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
- distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
- investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
- resolver problemas simples usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas.

Os estudantes podem ainda estudar sequências de somas parciais e descobrir que encontram uma função quadrática como fórmula da soma de n termos de uma progressão aritmética e uma função exponencial (abordada de forma totalmente intuitiva) na progressão geométrica.

Os estudantes poderão fazer investigações sobre outras características destas sucessões e mesmo chegar a caracterizar e a usar representações tabelares das primeiras diferenças, segundas diferenças e razões de termos sucessivos relacionando-as com os modelos linear, quadrático e exponencial. Poderão usar estas características para escolher modelos apropriados a situações contextualizadas.

Tema III – Modelos contínuos não lineares
– a exponencial e a logarítmica
– a logística

14 aulas de 90 minutos

Em muitos problemas as variáveis tomam valores que pertencem a modelos não lineares. De entre os modelos não lineares, são importantes e interessantes os exponenciais da forma $y = a(b^x)$.
Tarefas como "*EliM&Minação*" (brochura F12, pag 98) ou experimentais do tipo de "*o arrefecimento de água numa chávena*", com sensores de temperatura e uma calculadora gráfica ou um computador, permitem não só aos estudantes ajustar funções que não são de quaisquer dos tipos anteriormente estudados, mas também sugerir-lhes prolongamentos do estudo que fizeram com progressões geométricas.
Os modelos exponenciais podem ser introduzidos para resolver problemas de evolução das populações, poluição, temperaturas, drogas no sangue, materiais radioactivos, etc, alguns deles já abordados a um certo nível quando da abordagem das progressões geométricas.
Pretende-se que os estudantes sejam capazes de :

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos exponenciais sejam bons modelos quer para o observado quer para o esperado;
- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e predizer a forma do seu gráfico ...
- descrever as regularidades e diferenças entre os padrões lineares e exponenciais.
- obter formas equivalentes de expressões exponenciais;
- definir o número e e logaritmo natural;
- resolver equações simples usando exponenciais e logaritmos (no contexto da resolução de problemas).

Os estudantes podem reconhecer o logaritmo como solução de equações exponenciais e a função logarítmica como inversa da exponencial.
Problemas como "*A construção da barragem*" (Brochura Funções 12, pág 133) permitirão que o estudante reencontre o conceito de assimptota ou de limite.
Tarefas como " *Sismos na Internet*" (Brochura Funções 12 pág 137) permitirão que o estudante reconheça propriedades dos logaritmos e estude, aplicada a esta função, a taxa de variação num ponto.
As tarefas do tipo "*Matemática e música*" (Brochura Funções 12 pág 84-96 e pág 140-145) em que o estudante, usando sensores de som e calculadoras ou computadores, determina as frequências de notas de uma escala musical e investiga relações e diferenças entre essas notas, permitem discussões muito ricas na sala de aula.

Finalmente, uma tarefa do tipo da "*Evolução da população portuguesa*" (Brochura Funções 12, pág 110) permite encontrar a função logística que é modelo de variados fenómenos reconhecíveis em aplicações a estudos feitos em outras disciplinas.

Tema IV – Problemas de optimização – aplicações das taxas de variação – programação linear, como ferramenta de planeamento e gestão

14 aulas de 90 minutos

Taxas de variações e extremos

Já no 10º ano, os estudantes resolveram problemas de optimização, estimando ou mesmo calculando extremos de funções, sobre os gráficos e as tabelas das funções.
No 11º ano, tomaram contacto com a taxa média de variação e com a taxa de variação instantânea, interpretando geometricamente estes conceitos.
Os estudantes apercebem-se da relação entre o sinal da taxa de variação num intervalo e a monotonia da função nesse intervalo. Os novos exemplos da exponencial e da logarítmica podem servir para confirmar essa intuição reforçada pela repetição de exemplos de comportamento dos gráficos de funções diversas.
Um problema como aquele em que se atira uma pedra ao ar e a altura em função do tempo é dada por uma quadrática permite aos estudantes determinar a taxa de variação num instante qualquer, t_0, e representar no mesmo referencial a função dada e a função dos "declives das rectas tangentes" num intervalo do domínio da função. Uma situação problemática como esta poderá ter sido já estudada no 11º ano, mas pode agora ser aprofundada a sua análise, investigando a relação entre a forma do gráfico e os sinais dos declives das rectas tangentes.
Este tipo de exploração pode ser levado até à análise dos extremos. Por exemplo, traçando a parábola e a recta derivada eles confirmarão que para os valores de

t em que a segunda é negativa a primeira decresce, bem como para aqueles em que a segunda é positiva a primeira cresce e que no zero da afim encontrarão o extremo da quadrática. Problemas do tipo da determinação do volume máximo de uma caixa feita a partir de uma folha de papel, ou outros semelhantes, constituem oportunidades análogas.
O mesmo tipo de explorações aparece no contexto de situações problemáticas simples, como aquela em que um volume de um sólido é dado por uma cúbica. Editando na calculadora

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + c \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{y_1(x + 0,0000001) - y_1(x)}{0,0000001}$$

a cúbica e a função dos declives das rectas secantes para todo o x quando a amplitude do intervalo é $h = 0,0000001$. [Considera-se esta abordagem preferível ao recurso do nDerive da calculadora por manter presente o conceito de taxa de variação e permitir comparar os dois gráficos e estudar a influência do valor de h e procurar o extremo da primeira função através do mudança de sinal e zero da segunda. Recomenda-se a consulta das páginas 48 a 53 da Brochura, sobre o tema da "derivação numérica"].
Este modo de proceder pode ser adoptado no estudo da monotonia das funções exponenciais e logarítmicas. Com este método, os estudantes podem até compreender que a taxa de variação instantânea de uma função exponencial é proporcional ao valor da função no ponto considerado e interpretar isto como um crescimento relativo constante.
Do mesmo modo, se pode estudar a monotonia e os extremos de funções trigonométricas, em resposta a perguntas postas no contexto da resolução de problemas.
Pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;
- reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função;
- resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Programação linear

Situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares servem para delimitar um polígono convexo que dá informação completa sobre as quantidades possíveis para cada produto.
A matemática mobilizada é simples e acessível e as representações gráficas apuradas (domínios planos) e tabelas são bons instrumentos que ajudam a interpretar a situação, as condições impostas a uma produção ou uma cadeia de produção, armazenamento, distribuição, etc.

Os problemas colocados apresentam os constrangimentos característicos de cada situação e um objectivo (máximo ou mínimo de uma função objectivo) a ser alcançado com o maior êxito nas condições existentes.
Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão e desenvolver competências para tomar decisões boas em termos de planeamento (da produção, por exemplo) que podem ter a ver com maximizar lucros, minimizar custos ou consumos, etc.
Na aula de Matemática poderão tratar-se problemas simples com características idênticas. Assim cada exemplo tratará de maximizar ou minimizar uma determinada quantidade (função objectivo) tendo-se em conta certas limitações ou constrangimentos.
Se houver tempo, os estudantes podem mesmo ser colocados perante a necessidade de tomar decisões de novos investimentos que alterem as condições de fabrico (o polígono dos constrangimentos) de modo a responder a novos desafios ou a obter melhorias, com vantagem sobre o peso dos investimentos, nos máximos ou mínimos da função objectivo. No fundo, trata-se de colocar aos estudantes situações de trabalho em que seja marcante a utilidade do planeamento e benéfica a colaboração da matemática para tomar boas decisões em empresas ou colectivos de trabalhadores.

Pretende-se que os estudantes sejam capazes de:

- reconhecer que diferentes situações podem ser descritos pelo mesmo modelo matemático;
- resolver numérica e graficamente problemas simples de programação linear;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações.

■