Os poliedros

Não é possível conhecer em que circunstâncias históricas começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros, identificados como sólidos de faces planas. Do ponto de vista matemático, existem fontes egípcias, chinesas e babilónicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides.

No *Papiro de Rhind* [1] existem diversos problemas relativos ao declive das faces de uma pirâmide. Como sugere V. Katz, o valor do declive era essencial para os construtores das pirâmides, e na realidade os valores concretos referidos nesses problemas são aproximadamente iguais aos declives das três pirâmides de Gizeth.[2] No Papiro de Moscovo[3] é apresentada a fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada, embora a fórmula para o volume da pirâmide não apareça em nenhuma fonte egípcia. Assim, não se conhece como chegaram os egípcios aquela fórmula. No texto que acompanha a figura e os cálculos (fig. 1) é dito:

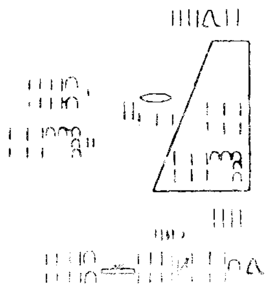


Figura 1. Extracto do Papiro de Moscovo com a resolução do problema do cálculo do volume do tronco de pirâmide.

> Se te é posto o problema, um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base, por 2 cúbitos no topo.
>
> Calcula com o 4, quadrando. Resultado 16.
> Calcula 2 vezes 4. Resultado 8.
> Calcula com o 2, quadrando. Resultado 4.
>
> Adiciona este 16 com este 8 e com este 4. Resultado 28.
>
> Calcula 1/3 de 6. Resultado 2.
> Calcula com o 28, vezes 2. Resultado 56.
>
> É 56. Encontraste o resultado certo.

Em notações actuais, a fórmula descrita neste texto egípcio corresponde a $V=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$, onde h é a altura da pirâmide, e a e b são os comprimentos dos lados das bases quadradas do tronco de pirâmide.

Nos *Nove Capítulos da Arte Matemática* (*Jiuzhang Suanshu* [4]) aparece a mesma fórmula, e também a fórmula do volume da pirâmide. Da mesma forma, existem tabletes babilónicas contendo problemas de cálculo de volumes de troncos de pirâmides e de outros sólidos (em forma de telhado de quatro águas) que parecem ter resultado da necessidade de calcular o volume de pilhas de grãos de cereal. No que diz respeito às fórmulas utilizadas, algumas são correctas, outras apenas aproximadas.

Em qualquer caso, todos estes documentos demonstram um interesse natural pelas formas poliédricas. Esse interesse não era apenas utilitário. Em escavações arqueológicas junto de Pádua foi descoberto um dodecaedro etrusco (500 a.C), do mineral esteatite, que era um objecto de jogo, e os egípcios usavam dados com a forma de icosaedros.

Os matemáticos gregos retomaram a questão do volume da pirâmide. Arquimedes, no livro do *Método*, afirma que Demócrito (que viveu no fim do séc. V a.C.) foi o primeiro a enunciar que o volume de um cone é 1/3 do de um cilindro tendo a mesma base e a mesma altura, e que o volume da pirâmide é 1/3 do de um prisma com a mesma base e altura igual. Arquimedes atribui a demonstração destas duas proposições a Eudóxio (c. 409 - c. 356 a.C.), apoiando-se no método da exaustão.[5]

Os sólidos Platónicos

Platão

Os cinco poliedros regulares — tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro — passaram a ficar conhecidos na história como *sólidos platónicos* em virtude de um famoso texto de Platão incluído no diálogo Timeu, de que reproduziremos um extracto mais abaixo.

Um poliedro é regular quando todas as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice. Heath sugere que os pitagóricos conheciam todos os sólidos platónicos e que construíam o tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro utilizando a construção em triângulos descrita por Platão no referido texto, enquanto para o dodecaedro se baseavam na construção do pentágono que mais tarde ficou registada nos *Elementos* (Eucl. IV,10,11). De resto, os pitagóricos utilizavam como seu símbolo distintivo o pentagrama, que se obtém a partir do pentágono traçando as respectivas diagonais (fig. 2).

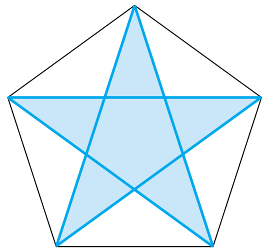
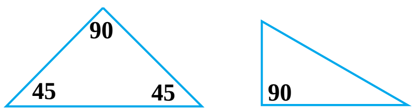


Figura 2

Teeteto (c. 417 - c 369 a.C.), um dos matemáticos gregos mais importantes da época de Platão, ensinou na Academia fundada por este em Atenas em 385 a.C. e parece dever-se a ele um estudo teórico dos cinco poliedros regulares, em particular do octaedro e do icosaedro. Segundo Heath, estudou as relações entre os cinco poliedros e também as superfícies esféricas circunscritas.

Fazemos em seguida uma longa transcrição do texto de Platão, acompanhada de algumas figuras interpretativas.

> Em primeiro lugar, é claro para toda a gente que o fogo, a terra, a água e o ar são corpos, e que todos os corpos são sólidos. Todos os corpos são limitados por superfícies e todas as superfícies rectilíneas são compostas por triângulos. Há dois tipos fundamentais de triângulos, cada um deles tendo um ângulo recto e dois ângulos agudos; num deles estes dois ângulos são metade de ângulos rectos, sendo subtendidos por lados iguais; no outro, são desiguais, sendo subtendidos por lados desiguais. Postulamos isto como a origem do fogo e dos outros corpos, combinando o nosso argumento a verosimilhança e a necessidade; as suas origens últimas são conhecidas dos deuses e dos homens a quem os deuses amam.
>
> 
>
>
> Figura 3. Os dois tipos fundamentais de triângulos considerados por Platão. Como diz Platão um pouco mais abaixo, o isósceles tem uma única variedade, o escaleno (o da direita) tem infinitas.
>
> Devemos continuar a indagar quais são os quatro corpos mais perfeitos possível que, embora diferentes uns dos outros, são capazes de se transformar uns nos outros por resolução. Se conseguirmos encontrar a resposta para esta questão temos a verdade sobre a origem da terra e do fogo e dos dois termos entre eles; porque nunca admitiremos que haja corpos visíveis mais perfeitos que estes, cada um do seu tipo. Assim, devemos fazer o possível para construir quatro tipos de corpo perfeito e defender que compreendemos suficientemente a sua natureza para atingirmos o nosso objectivo. Dos dois triângulos fundamentais, portanto, o isósceles tem uma única variedade e o escaleno um número infinito. Devemos por conseguinte escolher, se vamos começar de acordo com os nossos próprios princípios, o mais perfeito deste número infinito. Se alguém nos puder indicar uma melhor selecção de triângulo para a construção dos quatro corpos, essa sugestão será bem-vinda; mas pela nossa parte propomo-nos passar por cima de todos os restantes e seleccionar um único tipo, aquele cujo par compõe um triângulo equilátero. Seria uma história demasiado longa explicar a razão, mas se alguém conseguir apresentar uma prova de que assim não é, essa proeza será bem recebida. Assumamos então que estes são os dois triângulos a partir dos quais o fogo e os outros corpos são construidos: um isósceles e o outro com um lado maior cujo quadrado é o triplo do menor [...].
>
> Temos que descrever seguidamente a figura geométrica de cada corpo e indicar o número dos seus compo-

nentes. Começaremos com a construção da figura mais simples e mais pequena [fig. 5]. A sua unidade básica é o triângulo cuja hipotenusa tem o dobro do seu lado menor. Se se juntarem dois destes triângulos, com a hipotenusa como diâmetro da figura resultante, e se se repetir o processo três vezes, fazendo coincidir os diâmetros e os lados menores das três figuras no mesmo vértice, o resultado é um simples triângulo equilátero composto de seis unidades básicas. E se se juntarem quatro triângulos equiláteros, três dos seus ângulos planos encontram-se para formar um só ângulo sólido, aquele que aparece imediatamente a seguir ao mais obtuso dos ângulos planos; e quando quatro destes ângulos tiverem sido formados o resultado é a figura sólida mais simples, que divide a superfície da esfera, circunscrevendo-a em partes iguais e similares.

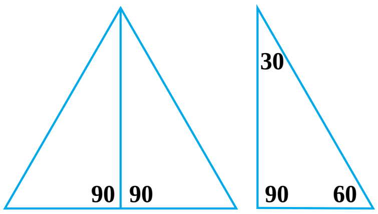


Figura 4. Das infinitas variedades de triângulos rectângulos escalenos, Platão escolhe aquele que é metade de um triângulo equilátero. E diz que é aquele cujo quadrado do lado maior é triplo do quadrado do lado menor (será assim?). Mais abaixo, afirma que neste tipo de triângulos a hipotenusa tem o dobro do comprimento do lado menor (será assim?).

A segunda figura é composta dos mesmos triângulos básicos reunidos para formar oito triângulos equiláteros e que formam um só ângulo sólido a partir de quatro planos. A formação de seis destes ângulos sólidos completa a figura número dois.

A terceira figura é formada a partir de cento e vinte triângulos básicos e tem doze ângulos sólidos, cada um deles limitado por cinco triângulos equiláteros planos e vinte faces, cada uma das quais é um triângulo equilátero.

Depois da construção destas três figuras dispensa-se a primeira das nossas unidades básicas e utiliza-se o triângulo isósceles para a produção do quarto corpo [fig. 6]. Quatro destes triângulos são juntos com os seus ângulos rectos encontrando se num vértice para formarem um quadrado, Seis quadrados postos em conjunto completam ângulos sólidos, cada um deles composto por três ângulos rectos planos. A figura do corpo resultante é o cubo, com seis faces quadradas planas.

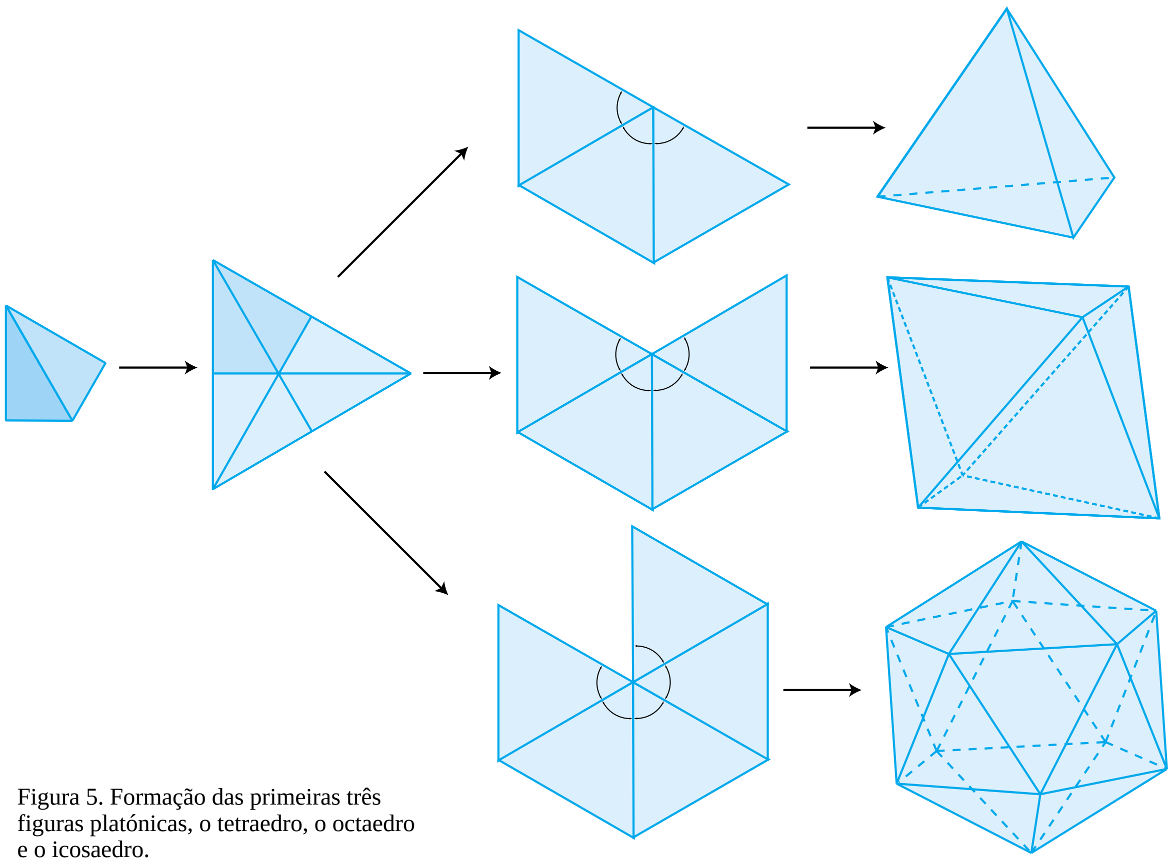


Figura 5. Formação das primeiras três figuras platónicas, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro.

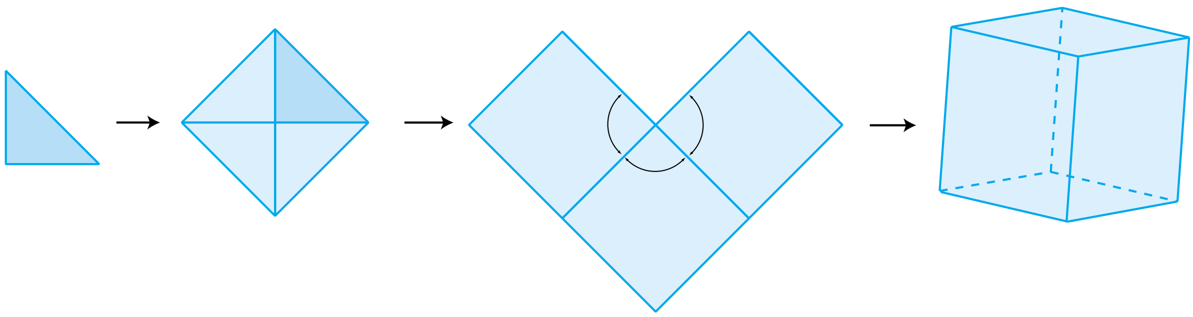


Figura 6. Construção da quarta figura platónica, o cubo ou hexaedro

Faltava ainda uma quinta construção que o deus utilizou para organizar todas as constelações do céu.

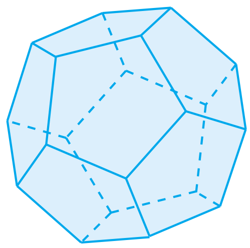


Figura 7. A figura platónica que faltava, o dodecaedro.

> (...) Devemos prosseguir distribuindo as figuras cujas origens acabámos de descrever pelo fogo, terra, água e ar. Atribuamos o cubo à terra, uma vez que é o mais imóvel dos quatro corpos e o que tem a forma mais estável, sendo estas características que deve possuir a figura com as formas mais estáveis. E relativamente aos triângulos básicos assumimos que o isósceles tem uma base naturalmente mais estável do que o escaleno, e que das figuras equiláteras compostas por eles o quadrado é, no todo ou em partes, uma base mais firme do que o triângulo equilátero. Mantemos assim o nosso princípio de verosimilhança atribuindo-o à terra e, de forma semelhante atribuímos à água a menos móvel das outras figuras, a mais móvel ao fogo e a intermédia ao ar. E de novo atribuímos a figura mais pequena ao fogo, a maior à água, a intermédia ao ar; a mais cortante ao fogo, a segunda mais cortante ao ar e a menos cortante à água. Resumindo, a figura que tem o menor número de faces deverá ser, pela natureza das coisas, a mais móvel, assim como a mais cortante e a mais penetrante e, finalmente, sendo composta pelo menor número de partes semelhantes, a mais leve. A nossa segunda figura será a segunda em todas estas características, e a nossa terceira será a terceira. Deste modo, a lógica e a verosimilhança exigem que olhemos a pirâmide como a figura sólida que é a unidade básica ou a semente do fogo; e podemos olhar a segunda das figuras que construímos como unidade básica do ar, a terceira a da água.[6]

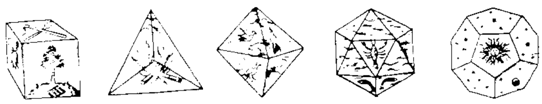


Figura 8. A interpretação de Kepler, no *Harmonices Mundi*, das associações de Platão.

Euclides

Nos *Elementos*, os poliedros são tratados nos livros XI, XII e XIII. No livro XIII, a partir da proposição 13, Euclides estuda sistematicamente os sólidos platónicos. As construções do tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro, como sólidos inscritos numa dada superfície esférica, são demonstradas nas proposições 13, 14, 15 , 16 e 17, respectivamente. A proposição 18 estabelece as relações entre as arestas destes sólidos e o diâmetro da superfície esférica. E finalmente, logo a seguir a esta proposição, Euclides afirma e demonstra que “nenhuma outra figura, além das ditas cinco figuras, pode ser construida de modo a ficar contida por figuras, de lados e ângulos iguais, e iguais entre si”. Dito de outro modo, Euclides afirma que além dos cinco sólidos que acabou de construir, não pode ser construido mais nenhum poliedro cujas faces sejam polígonos regulares, iguais entre si.

Sigamos a sua demonstração[7].

> Porque um ângulo sólido não pode ser construido por dois triângulos planos.

Por “triângulo” Euclides quer dizer triângulo equilátero, pois está sempre a referir-se a polígonos regulares.

> Com três triângulos constrói-se o ângulo [sólido] do tetraedro, com quatro o ângulo do octaedro e com cinco o ângulo do icosaedro; mas um ângulo sólido não pode ser formado por seis triângulos equiláteros e equiangulares colocados em torno de um ponto, pois sendo o ângulo do triângulo equilátero igual a dois terços do ângulo recto, os seis serão iguais a quatro ângulos rectos: o que é impossível, pois *um ângulo sólido está contido por ângulos planos, cuja soma é menor que quatro ângulos rectos* [II. 21].

Euclides serve-se aqui da proposição 21 do livro II, na qual demonstra a afirmação que colocámos em itálico.

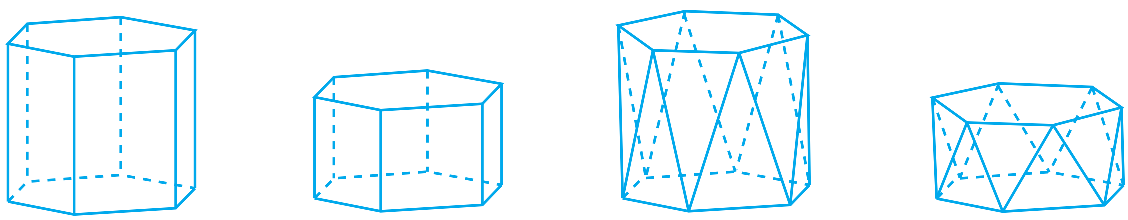
> Pela mesma razão, também um ângulo sólido não pode ser construido por mais do que seis ângulos planos [medindo cada um dois terços do ângulo recto].
>
> O ângulo [sólido] do cubo é contido por três quadrados, mas um ângulo sólido não pode estar contido por quatro quadrados, pois teríamos de novo quatro ângulos rectos.
>
> O ângulo sólido do dodecaedro está contido por três pentágonos equiláteros e equiangulares, mas nenhum ângulo sólido pode estar contido por quatro destes pentágonos, pois como o ângulo [interno] do pentágono [regular] é igual a um recto e um quinto [de um ângulo recto], quatro seriam maiores do que quatro ângulos rectos: o que é impossível.
>
> Pela razão da mesma absurdidade, também nenhum ângulo sólido poderia estar contido por outras figuras poligonais [regulares].
>
> Portanto [*nenhuma outra figura, além das ditas cinco figuras, pode ser construida de modo a ficar contida por figuras, de lados e ângulos internos iguais, e iguais entre si*].

O facto de Euclides terminar os treze volumes da sua obra monumental com esta proposição tem levado alguns autores a afirmar que o objectivo principal dos *Elementos* é precisamente demonstrar a existência de apenas cinco poliedros regulares.

Os sólidos arquimedianos

Se na definição que demos de poliedro regular mantivermos a condição das faces serem polígonos regulares, *mas não a de serem todas congruentes*, obtemos uma família mais ampla de sólidos, estudada por Arquimedes (287-212 a.C.). Note-se que as arestas são todas congruentes, e os vértices também. As faces são polígonos regulares, mas enquanto nos platónicos eram apenas de um tipo, aqui poderão ser de vários tipos. É ainda necessário acrescentar a condição de que todo o vértice pode ser transformado noutro vértice por uma simetria do poliedro. A estes sólidos é habitual chamar *arquimedianos* ou *semi-regulares*.

Os prismas cujas faces laterais são regulares são, de acordo com a definição dada, arquimedianos. Do mesmo modo, também os antiprismas de faces regulares são arquimedianos (fig. 9). No entanto, os infinitos prismas e antiprismas não são em geral incluídos na família dos arquimedianos.



A. Prisma hexagonal (recto)

B. Se diminuirmos a altura do prisma anterior até as faces laterais serem quadrados, obtemos um prisma hexagonal semi-regular)

C. Se rodarmos uma das bases até opor cada vértice de uma base a um lado da outra, e unirmos os vértices como na figura, obtemos um antiprisma.

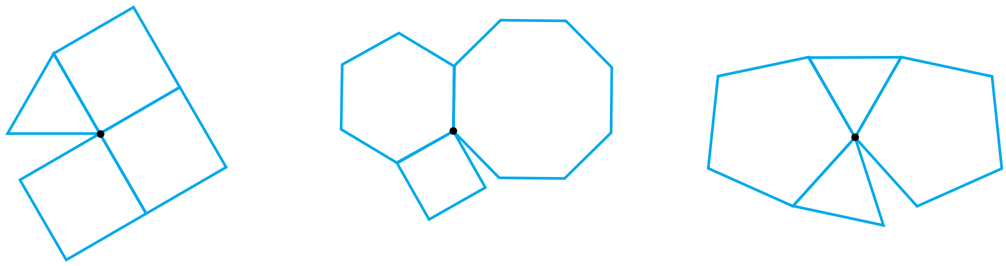
D. Diminuindo a altura do antiprisma anterior até as faces laterais serem triângulos equiláteros, obtemos um antiprisma semi-regular.

Figura 9. Prismas e antiprismas.

Sem os prismas e antiprismas, a família dos arquimedianos é finita. Tal como para os platónicos, é natural investigar quantos poliedros arquimedianos podem existir e, além disso, construi-los efectivamente. A investigação poderá seguir o mesmo caminho indicado na demonstração de Euclides para os platónicos, embora aqui muito mais morosa pois podemos no mesmo vértice incluir polígonos regulares diferentes. Chegaríamos à conclusão que não podem existir mais do que 13 tipos de vértices diferentes.[8] A cada um desses tipos de vértices corresponde um sólido arquimediano.

Os livros de Arquimedes sobre estes sólidos estão perdidos. Foi Johanes Kepler (1571-1630) quem se interessou de novo por estes sólidos a ponto de lhes atribuir nomes e desenhar as respectivas ilustrações no *Harmonices Mundi* de 1619.

Como a cada tipo de vértice corresponde um arquimediano, a notação para os tipos de vértices serve para designar os diferentes sólidos. Na figura 10 podemos ver três tipos de vértices, a notação usada — cuja origem é simples de compreender — e os nomes dos sólidos correspondentes — cuja origem algo misteriosa será explicada mais abaixo.



3.4^3 — rombicuboctaedro   4.6.8 — cuboctaedro truncado $(3.5)^2$ — icosidodecaedro

Figura 10. Três tipos de vértices correspondentes a poliedros arquimedianos

Nas figuras 11 e 12 das páginas seguintes estão representados onze dos treze arquimedianos, incluindo as imagens, os nomes e os respectivos símbolos. Cada um deles pode obter-se por meio de uma sucessão de cortes, também chamados truncaturas — por vezes seguidas de transformações convenientes— a partir dos sólidos platónicos. As truncaturas, em cada vértice, são feitas por planos perpendiculares ao eixo de simetria de rotação que passa por esse vértice. Obtêm-se assim em geral polígonos regulares como secções. Conforme a distância do vértice a que a truncatura se faz, assim se vão obtendo vários poliedros arquimedianos.

Se partirmos do tetraedro e do cubo (ou do octaedro), conseguimos chegar por truncaturas directas aos seguintes arquimedianos:

- tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, cuboctaedro;

Se partirmos do icosaedro (ou do dodecaedro), conseguimos chegar aos seguintes arquimedianos:

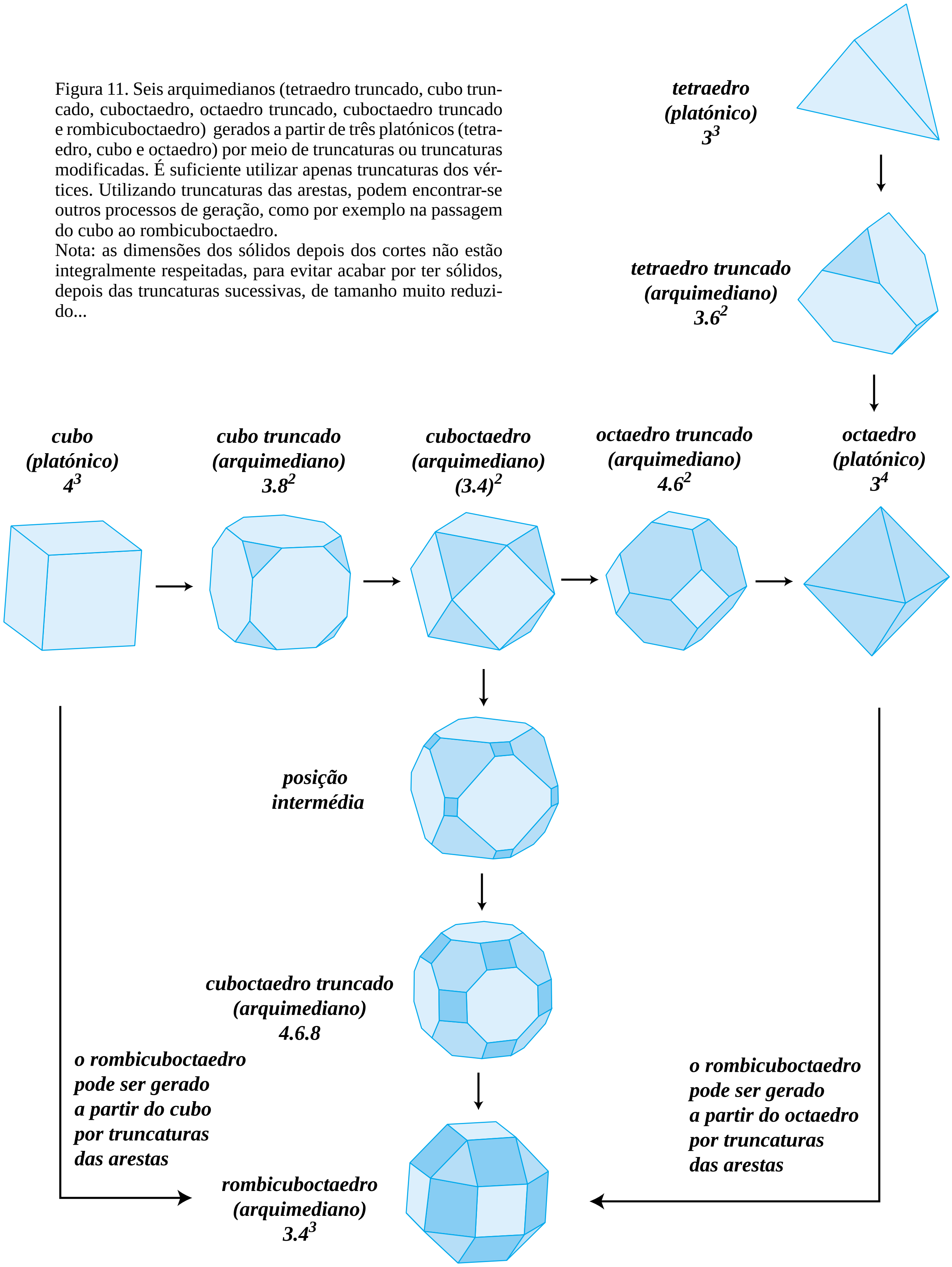
- icosaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado.

Note-se, na figura 11, que o cuboctaedro fica “entre” o cubo e o octaedro, podendo ser obtido por truncaturas tanto a partir do cubo como do octaedro. Daí o seu nome. Do mesmo modo, na figura 12, o icosidodecaedro fica “entre” o icosaedro e o dodecaedro, o que também justifica o seu nome.

Vejamos agora como se podem obter os restantes arquimedianos incluídos nas figuras 11 e 12 — cuboctaedro truncado, rombicuboctaedro, icosidodecaedro truncado, rombicosidodecaedro.

Da figura 11 parece concluir-se que é possível obter directamente por truncaturas estes arquimedianos. *Tal não é verdade*. Se truncarmos os vértices do cuboctaedro por planos perpendiculares aos eixos de simetria de rotação (que são de grau 2) não obtemos quadrados, *mas sim rectângulos*. É necessário transformar esses rectângulos em quadrados para obtermos o cuboctaedro truncado e e rombicuboctaedro.

Figura 11. Seis arquimedianos (tetraedro truncado, cubo truncado, cuboctaedro, octaedro truncado, cuboctaedro truncado e rombicuboctaedro) gerados a partir de três platónicos (tetraedro, cubo e octaedro) por meio de truncaturas ou truncaturas modificadas. É suficiente utilizar apenas truncaturas dos vértices. Utilizando truncaturas das arestas, podem encontrar-se outros processos de geração, como por exemplo na passagem do cubo ao rombicuboctaedro.
Nota: as dimensões dos sólidos depois dos cortes não estão integralmente respeitadas, para evitar acabar por ter sólidos, depois das truncaturas sucessivas, de tamanho muito reduzido...



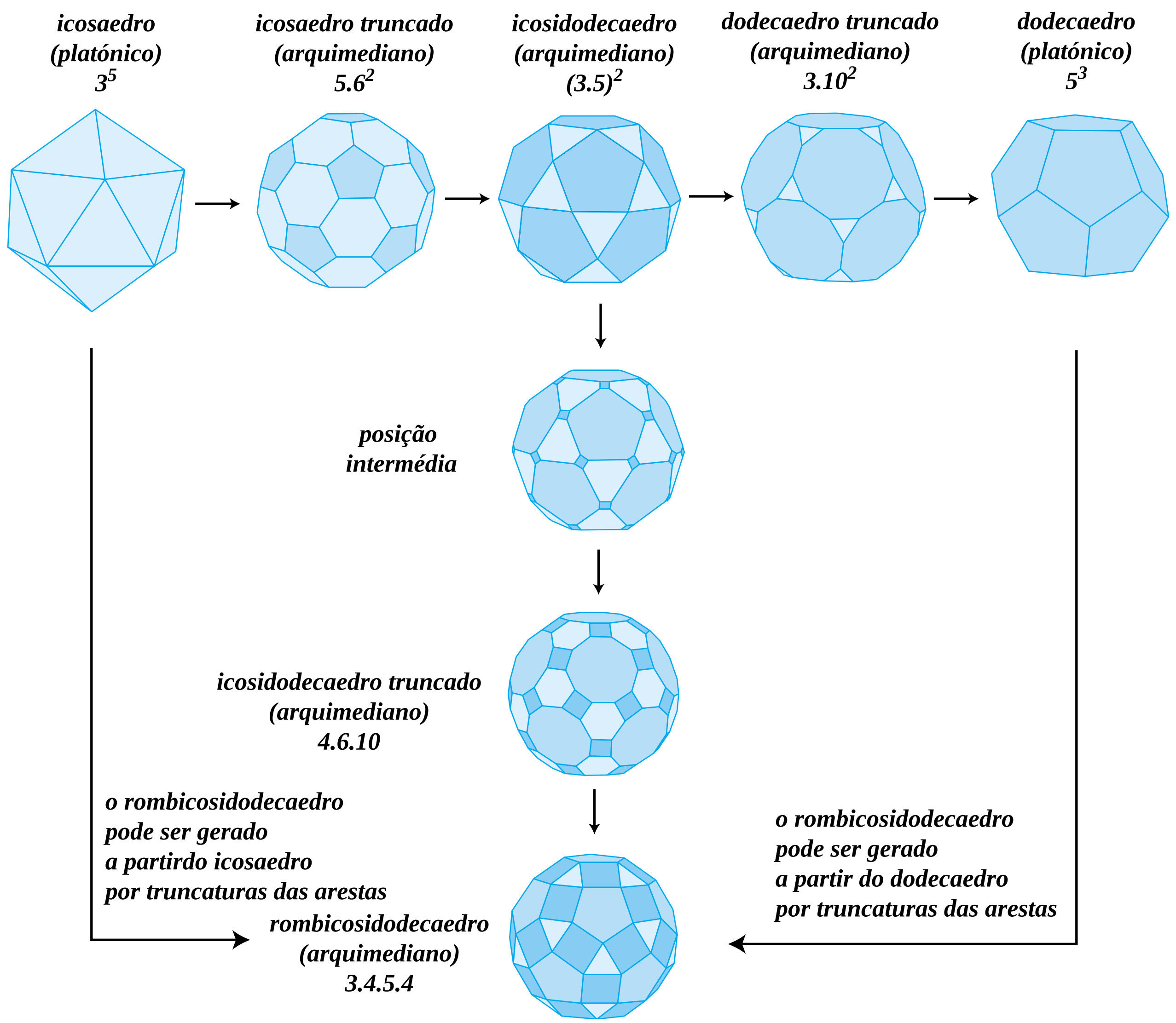


Figura 12. A partir do icosaedro (ou do dodecaedro) podemos por truncaturas (ou truncaturas modificadas) dos vértices chegar aos 5 arquimedianos seguintes: icosaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosidodecaedro truncado e rombicosidodecaedro.

Da mesma forma, só com uma truncatura seguida de uma transformação dos rectângulos resultantes em quadrados podemos obter o icosidodecaedro truncado e o rombicosidodecaedro.

A utilização dos nomes com o prefixo *rombi* resulta do facto desses poliedros poderem inscrever-se em sólidos com faces rômbicas.[9]

Restam portanto dois arquimedianos, os quais não se podem obter por sucessões de truncaturas (deste tipo). São os chamados arquimedianos achatados (do inglês *snub*[10]): cubo achatado e dodecaedro achatado (figura 13).

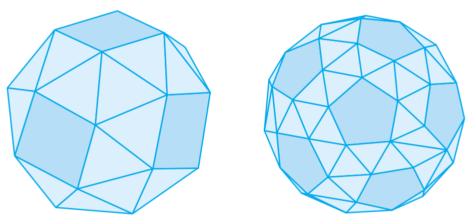


Figura 13. O cubo achatado, à esquerda, e o dodecaedro achatado, à direita. Os símbolos dos vértices são respectivamente $3^4.4$ e $3^4.5$.

Em 1984, o matemático francês Jean-François Rotgé mostrou que estes dois arquimedianos também se podem obter do octaedro e do icosaedro mediante truncaturas especiais, nas quais o que resta de cada face do octaedro e do icosaedro é um triângulo equilátero numa posição especial (fig. 14). Na figura 15 tentamos mostrar como se pode efectivamente obter o cubo achatado.

Se a razão r adoptada na figura 14 for 1.943 em lugar de 1.839, e se o poliedro de que partimos for o icosaedro, obtemos o dodecaedro achatado. Diga-se também que pelo mesmo processo se pode obter o icosaedro do tetraedro, fazendo r igual à razão de ouro — $(1+\sqrt{5})/2$.

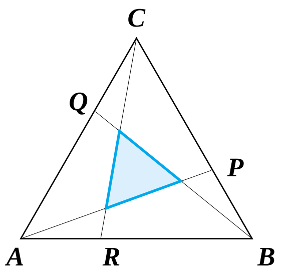


Figura 14. Em cada uma das faces do octaedro é definido um triângulo como indicado na figura, de tal modo que

$$r = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \approx 1.839$$

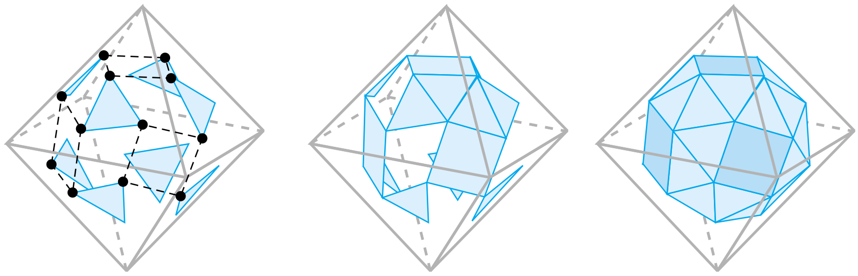


Figura 15. Três fases da construção do cubo achatado. i) Sobre cada uma das faces do octaedro é desenhado um triângulo obtido como na figura 14. Os vértices destes triângulos, tomados quatro a quatro, vão definir as seis faces quadradas. Estão indicados três desses grupos de vértices. ii) O cubo achatado começa a ser construido, vendo-se já três faces quadradas e alguma triangulares. iii) o cubo achatado está já construído; como se vê, pode ser obtido por cortes apropriados do octaedro.

Estes dois arquimedianos têm algumas características de simetria diferentes dos anteriores onze. Não têm planos de simetria de reflexão. Por outro lado, cada um deles tem duas formas em que cada uma é a imagem num espelho da outra, como uma luva ou uma mão vistas ao espelho (formas enantiomórficas). Se na figura 14 os pontos P, Q e R ficassem mais próximos de C, A e B do que dos outros vértices do triângulo, o triângulo colorido ficaria “inclinado para a direita” e iríamos obter a outra forma possível do cubo achatado.

Poliedros no Renascimento

No período do Renascimento, diversos artistas e matemáticos se interessaram pelo estudo e representação dos poliedros. Veremos como Ucello, já entre 1420 e 1425, ao desenhar mosaicos na Catedral de S. Marcos, em Veneza, escolheu um poliedro estrelado como motivo.

Cerca do ano 1480, Piero della Francesca, um dos mais famosos pintores desse período e criador da teoria da perspectiva (ver no cap. V, “Perspectiva e geometria projectiva”), escreveu um tratado sobre os cinco sólidos regulares, chamado *Libellus de cinque corporibus regularibus*. Partes do tratado foram incorporados por Luca Pacioli (1445-1517), no seu popular compêndio de matemática, *Summa de Arithmetica, geometria, proportione et proportionalita*, editado em Veneza em 1494. Num outro livro de Pacioli, *De Divina proportione*, editado em Florença em 1509, aparecem desenhos de poliedros, em particular arquimedianos, da autoria de Leonardo da Vinci (fig. 16). Os desenhos de Leonardo salientam a estrutura dos poliedros, representando apenas as suas arestas.

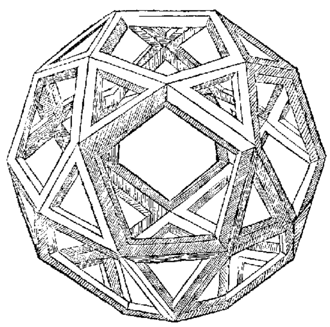


Figura 16. Desenho do dodecaedro truncado, por Leonardo da Vinci.

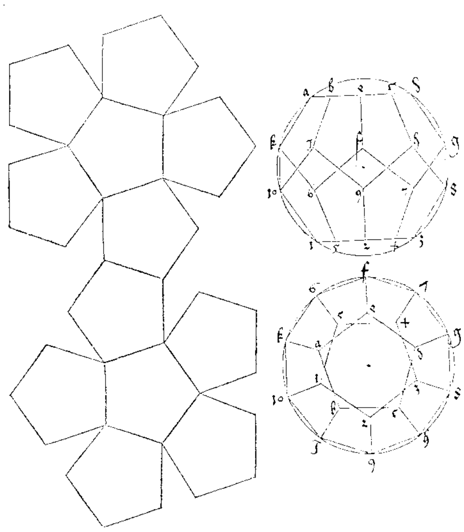


Figura 17. Planificação do dodecaedro desenhada por Dürer.[11]

Capa de Mathématiques au fil des âges

redução para 63%

Figura 18. Reprodução parcial do retrato de *Frei Luca Pacioli com o seu aluno Guidobaldo, Duque de Urbino*, por Jacopo de Barbari.

Dürer, no tratado já referido *Underveissung der messung*, apresenta, possivelmente pela primeira vez, a ideia de construção de sólidos a partir da sua planificação. O livro inclui planificações de vários poliedros regulares e semi-regulares.

Na figura 17 reproduzimos um desenho de Dürer daquele tratado, em que aparecem ao mesmo tempo a planificação de um dodecaedro e duas vistas do dodecaedro.

Dürer fez duas visitas a Itália, e numa carta escrita em Veneza ao seu amigo Pirkheimer, durante a segunda visita, diz que irá permanecer oito dias em Bolonha onde "alguém lhe quer ensinar os segredos da perspectiva".[12] Depois dessa visita Dürer dedica-se com maior intensidade a estudos de geometria, e às ligações entre a perspectiva linear e a geometria euclidiana. De acordo com Kemp, são evidentes as influências de Piero della Francesca e mesmo de Leonardo da Vinci. O mesmo Kemp especula que provavelmente o seu instrutor foi Pacioli. Este tinha estreitas ligações com Alberti, com Piero della Francesca e com Leonardo da Vinci. Há até quem tenha sugerido que é Dürer que está representado com Pacioli na pintura de Jacopo de Barbari, reproduzida na figura 18. A presença de um poliedro de vidro nessa pintura — um rombicuboctaedro — sugere, de acordo com Joseph Malkevitch, que Pacioli construiria modelos de poliedros em vidro.[13]

De acordo com o mesmo autor, o interesse de tantos artistas do renascimento pelo estudo e representação dos poliedros, além de justificável pelo conhecido interesse naquele período pelo estudo dos autores gregos, nomeadamente pelos *Elementos* de Euclides, seria também provocado pelo desafio que constituiria a utilização da perspectiva naquela representação.

Os poliedros estrelados

Já vimos que Kepler deu importantes contribuições ao estudo dos poliedros arquimedianos. Em particular provou que, além dos prismas e antiprismas, apenas podem existir treze poliedros arquimedianos. A este respeito é interessante notar, como faz Malkevitch, que de acordo com a definição adoptada por Arquimedes e por Kepler (em que apenas se exige que os vértices sejam congruentes mas não que exista uma transformação de simetria do poliedro que transforme cada um dos vértices noutro qualquer), existem 14 e não apenas 13 arquimedianos (fig. 19). E na realidade, noutro local, Kepler refere-se a 14 arquimedianos, mas sem acrescentar qualquer outro detalhe.

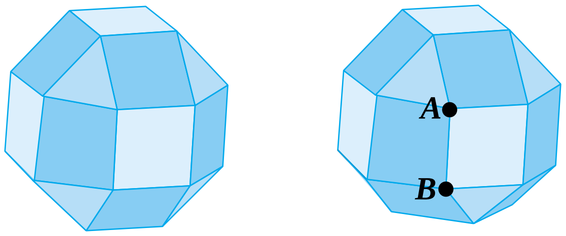


Figura 19. O sólido da direita é obtido do rombicuboctaedro, à esquerda, rodando de 45° a calote inferior. Note-se que os vértices continuam com os mesmos polígonos e dispostos da mesma maneira. No entanto, não existe nenhuma transformação de simetria do poliedro que transforme o vértice *A* no vértice *B*, por exemplo. Não é portanto um arquimediano. Chama-se pseudorombicuboctaedro.

Uma outra categoria de poliedros que surge no período do renascimento e que são também estudados por Kepler são os *estrelados*. Num mosaico de Ucello, existente na Catedral de S. Marcos, em Veneza, aparece-nos um exemplo de um sólido desse tipo (fig. 20). Se examinarmos bem a figura, e considerarmos que a parte escondida é simétrica da que se vê, podemos intuir que esse poliedro se poderia obter a partir de um dodecaedro, colando nas suas doze faces outras tantas pirâmides pentagonais regulares, cujas faces fossem triângulos equiláteros. Construiríamos assim o sólido chamado *pequeno dodecaedro estrelado* (fig. 21).

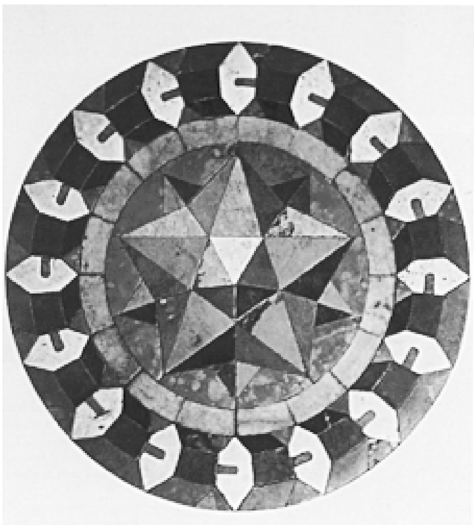


Figura 20. Mosaico de Ucello na catedral de S. Marcos, em Veneza (1420-1425).

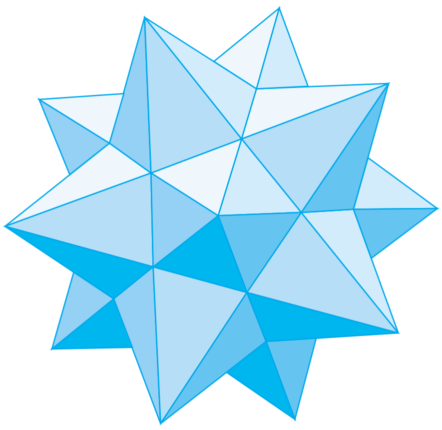


Figura 21. Pequeno dodecaedro estrelado, primeira estrelação do dodecaedro.

Para compreendermos bem como se geram os sólidos estrelados, torna-se conveniente começar por ver o que são polígonos estrelados. Comparemos o que acontece quando prolongamos os lados de um triângulo equilátero e os lados de um pentágono regular (fig. 22).

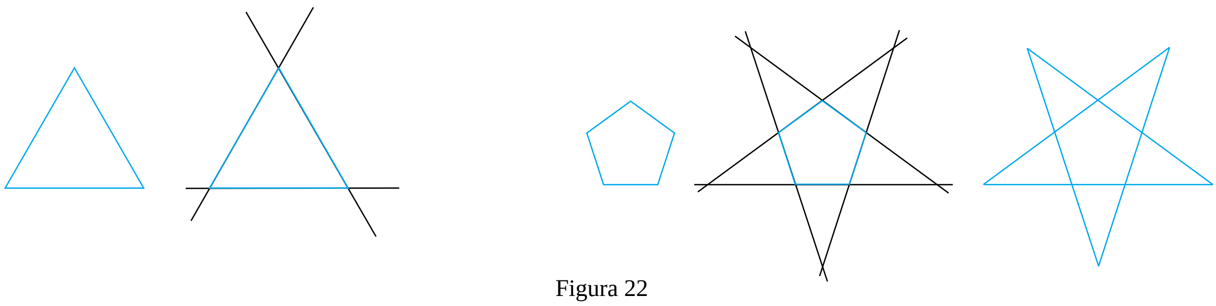


Figura 22

No primeiro caso, não podemos formar um novo polígono constituído pelos lados prolongados, pois eles não se voltam a encontrar. Mas no caso do pentágono regular, os lados prolongados intersectam-se, e podemos portanto formar um novo polígono com cinco segmentos formados a partir dos lados prolongados. Obtemos, de resto, o pentagrama dos pitagóricos. É um polígono não convexo, com cinco lados congruentes. Se considerarmos que é regular o polígono de lados congruentes e ângulos formados por pares de lados consecutivos também congruentes, estamos perante um polígono regular.

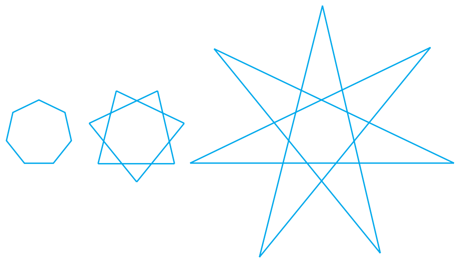


Figura 23. Heptágono e as suas duas estrelações.

Um polígono pode admitir mais do que uma estrelação. Na figura 23 vemos como o heptágono admite duas estrelações.

O processo de obter sólidos estrelados é análogo ao dos polígonos. Se prolongarmos as faces de um dodecaedro, e considerarmos as suas intersecções, obtemos a primeira estrelação do dodecaedro, um poliedro chamado *pequeno dodecaedro estrelado*, que já representámos na figura 21. Note-se que as faces do pequeno dodecaedro estrelado são pentagramas. Existem doze pentagramas como faces, das quais são visíveis seis na figura 21.

O dodecaedro admite ainda outras estrelações. Se prolongarmos as faces (pentagramas) do pequeno dodecaedro estrelado, obtemos o *grande dodecaedro*, cujas faces em número de 12 são de novo pentágonos regulares (fig. 24). Seis desses pentágonos são visíveis na figura. Se fizermos ainda uma nova estrelação, resulta um sólido estrelado, o grande dodecaedro estrelado, novamente com 12 faces que são pentagramas. Está representado na figura 25, mas como se está a tornar evidente, a representação destes sólidos complexos resulta mal a uma cor. Quando se pretende ficar com uma ideia de como são estes sólidos, a única solução é observar um modelo, e de preferência construi-lo.[14]

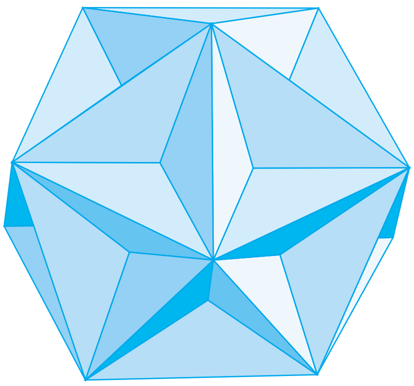


Figura 24. Grande dodecaedro, segunda estrelação do dodecaedro

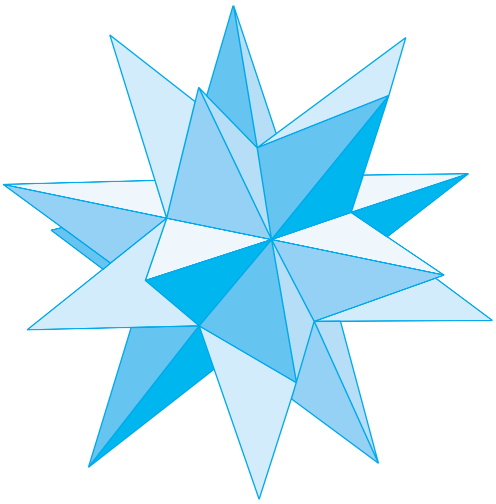


Figura 25. Grande dodecaedro estrelado, terceira estrelação do dodecaedro

Nas três figuras representando as estrelações do dodecaedro, deve notar-se que para salientar as faces e distingui-las se utilizam várias tonalidades de cor. Cada face — pentágonos no grande dodecaedro e pentagramas no pequeno e grande dodecaedros estrelados — tem um tom. Deve também notar-se que as faces se intersectam, como já foi observado. Para interpretar estes sólidos como verdadeiros poliedros, é essencial compreender quais são as faces, as arestas e os vértices. Assim, no pequeno dodecaedro estrelado, os lados dos pequenos triângulos equiláteros *não são arestas*. As arestas são os lados das faces, e as faces são pentagramas, não são triângulos equiláteros. Do mesmo modo, existem falsos vértices deste poliedro, que são os vértices dos ângulos sólidos concavos. Como não estão nas extremidades das arestas, não são verdadeiros vértices do grande dodecaedro.

Se contarmos correctamente as faces, os vértices e as arestas do grande dodecaedro e do pequeno dodecaedro estrelado, veremos que são em igual número em ambos os poliedros (12 faces, 12 vértices e 30 arestas). Quanto ao grande dodecaedro estrelado, tem 12 faces, 20 vértices e 30 arestas.

Um poliedro platónico que dá origem a muitas estrelações é o icosaedro. Foi já neste século que Coxeter[15] provou a existência de 59 estrelações do icosaedro. Muitos dos sólidos obtidos nestas estrelações do icosaedro não são verdadeiros poliedros, mas sim sólidos compostos, que estudaremos um pouco mais à frente. Do ponto de vista histórico, interessa-nos particularmente a 16ª estrelação do icosaedro, o chamado *grande icosaedro*, que reproduzimos na figura 26, a partir de um desenho do livro de Cundy. As faces do grande icosaedro são triângulos equiláteros, em número de 20. Os vértices são em número de 12 e as arestas são 30.

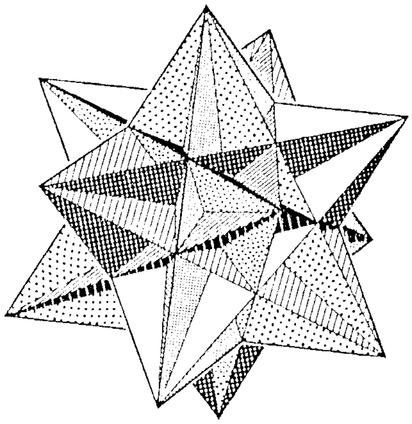


Figura 26. O grande icosaedro.

Os nove poliedros regulares

Que significa a palavra regular quando aplicada a um polígono? Que os lados e os ângulos entre lados consecutivos são todos congruentes. Embora normalmente se inclua implicitamente as condições de serem convexos e de os lados não se intersectarem, estas condições não são formuladas explicitamente, em geral. Assim, nada impede que um pentagrama seja um polígono regular. No caso dos poliedros, regularidade significa que todas as faces são polígonos regulares congruentes e que todos os vértices são congruentes (mesmo número de faces encontrando-se em cada vértice). Se admitirmos que as faces podem ser polígonos regulares generalizados (incluindo os pentagramas, por exemplo) e que se podem intersectar, os quatro poliedros obtidos por estrelação que acabámos de estudar (as três estrelações do dodecaedro e a 16ª estrelação do icosaedro) são regulares.

O pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado foram descobertos por Kepler — embora não haja indicações de que Kepler os associou como regulares aos 5 platónicos. Em 1810, Poinsot (1777-1859) descobre os quatro estrelados, e existem indicações de que Poinsot compreendeu que num certo sentido estes quatro poliedros eram regulares. Não existe no entanto a certeza que Poinsot não conhecesse a anterior descoberta de Kepler. Em qualquer caso, os quatro estrelados são conhecidos pelos poliedros de Kepler-Poinsot.

Assim, adoptando num sentido largo os conceitos de polígonos e sólidos regulares, os trabalhos de Kepler e Poinsot afirmam que existem pelo menos nove poliedros regulares. Pouco depois das descobertas de Poinsot, Cauchy provou, em 1813, que apenas podem existir nove poliedros regulares.

Descartes e os poliedros

A intervenção de Descartes (1596-1650) na geometria do espaço e na história dos poliedros está ligada a uma odisseia por que passou o livro *De Solidorum Elementis*. O seu manuscrito ficou mergulhado no Sena por três dias, depois de um naufrágio, foi copiado por Leibnitz em 1676 e perdeu-se em seguida até hoje. Entretanto a cópia de Leibnitz também se perdeu, sendo encontrada 200 anos depois em Hannover, na Alemanha.

Descartes introduz a noção de *défice angular* ou *desvio esférico*. (em inglês, *angle defect*).

Um ponto no plano está rodeado, por assim dizer, por um ângulo de 360° ou 2π. O mesmo acontece a um ponto sobre uma superfície esférica. Se pensarmos agora num vértice de um poliedro, podemos considerar que ele está "rodeado" pela soma dos ângulos planos medidos nas faces que concorrem nesse ponto. Se considerarmos apenas poliedros convexos (e certamente que, embora não o diga, era o que Descartes fazia), a soma dos ângulos planos num vértice é sempre inferior a 2π. É natural então definir como défice angular δ a diferença $\delta = 2\pi - (\textit{soma dos ângulos em torno do vértice})$.

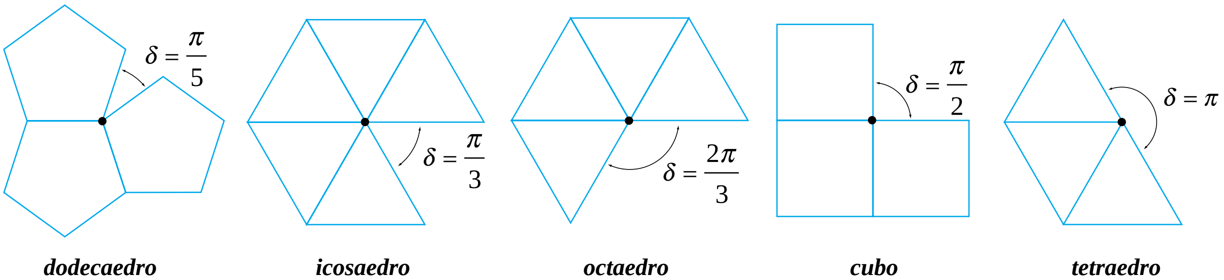


Figura 27. O défice angular num dado vértice pode visualizar-se fazendo a planificação das faces do poliedro que concorrem nesse vértice. Na figura apresentam-se os défices angulares, por ordem crescente, nos sólidos platónicos.

Por exemplo, nos vértices do tetraedro o défice angular é 180° (três ângulos planos de 60° em cada vértice), enquanto no icosaedro o défice angular em cada vértice é apenas 60°. Como seria de esperar, junto de cada um dos vértices, o icosaedro "está mais próximo" de uma esfera do que o tetraedro. O dodecaedro ainda se aproxima mais de uma esfera (défice angular em cada vértice igual a 36° apenas). É melhor — do ponto de vista de rolar melhor — construir um dado com um dodecaedro do que com um icosaedro ou com um cubo.

Um resultado importante descoberto por Descartes refere-se ao défice angular total dos poliedros regulares. O *défice angular total* de um poliedro é a soma dos défices angulares. Descartes prova no seu livro que

O défice angular total de um poliedro regular é igual a 4π.

Como é de prever, a partir deste resultado, que impõe uma condição forte para um poliedro ser regular, é possível demonstrar que existem apenas cinco poliedros convexos regulares.[16]

A fórmula de Euler: $V + F - A = 2$

A controvérsia sobre a fórmula de Euler a as sucessivas demonstrações e refutações da sua validade constitui por si só uma "história da geometria" fascinante.[17]

Numa carta a Christian Goldbach, em 1750, Euler refere-se à sua descoberta de que num poliedro $V + F - A = 2$, sendo V, F e A respectivamente o número de vértices, faces e arestas do poliedro. Inicialmente, Euler fez extensas verificações da sua conjectura, para diversos tipos de sólidos — prismas, pirâmides, etc. — e não apresentou nenhuma demonstração, dizendo apenas que

> Devo admitir em primeiro lugar que ainda não consegui uma demonstração rigorosa deste teorema... Como, em todo o caso, a sua verdade foi estabelecida em tantos casos, não pode haver dúvidas que é verdadeiro para qualquer sólido. Portanto a proposição parece satisfatoriamente demonstrada.[18]

Mais tarde, Euler apresenta uma demonstração.[19] No entanto, tal como Descartes e anteriormente Euclides, Euler não diz a que tipo de poliedros se está a referir. E não consegue apresentar uma demonstração aceitável.

Este é apenas o começo da longa história das "provas e refutações" da fórmula (ou teorema) de Euler. Matemáticos como Legendre, Cauchy, Gergonne, Steiner, Von Staudt e outros menos conhecidos estiveram envolvidos nesta longa polémica descrita no livro de Lakatos.

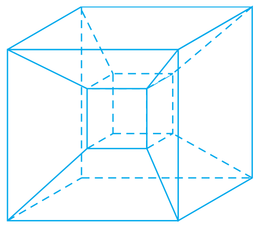


Figura 28

Um dos maiores motivos da controvérsia resulta da indefinição do termo poliedro. Por vezes as demonstrações, como no caso da de Cauchy em 1813, pressupunham que o poliedro era topologicamente equivalente a uma superfície esférica.[20] Nesse caso, um simples contra-exemplo, como o da figura 28, bastava para invalidar a demonstração e mesmo a generalidade com que era enunciado o teorema. Vê-se imediatamente que a fórmula de Euler não é válida para este sólido, pois $V+F-A=16+16-32=0$. Quanto à demonstração apresentada por Cauchy, baseava-se na possibilidade de retirar uma face ao poliedro e em seguida deformá-lo continuamente até o estender sobre uma superfície plana, sem o rasgar. Ora no contra-exemplo, que não é topologicamente equivalente a uma superfície esférica (mas sim a um toro), tal não é possível. Tais contra-exemplos eram apelidados de "monstros" na época, por não verificarem a fórmula de Euler.

Noutros casos, como na demonstração de Legendre, o tipo de poliedros para os quais se fazia a demonstração — poliedros convexos — era demasiado restrito, pois a demonstração era válida para uma classe mais larga de poliedros.

É interessante observar a propósito que o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro não verificam o teorema de Euler.

Dualidade e sólidos de Catalan

De acordo com J. Malkevitch, o primeiro estudo sistemático da dualidade nos poliedros deve-se a E. C. Catalan, que num texto intitulado "Mémoire sur la théorie des polyèdres", publicado em 1865, apresenta a lista dos duais dos poliedros arquimedianos.[21]

Uma unificação do conceito de dualidade que seja apropriado para uma categoria muito geral de poliedros não está feita e será mesmo porventura impossível.[22] Vamos limitar-nos a apresentar o conceito de dualidade para os poliedros convexos, e em particular para os platónicos e arquimedianos.

Qualquer sólido platónico ou arquimediano pode ser inscrito numa superfície esférica. Se, no caso de um sólido platónico, imaginarmos o plano tangente à respectiva superfície esférica em cada um dos vértices e se tomarmos esses planos como os planos das faces de um novo poliedro, este será também platónico. Se partirmos de um tetraedro, obtemos de novo um tetraedro. Se partirmos de um cubo, obtemos um octaedro e vice-versa. Se partirmos de um dodecaedro, obtemos um icosaedro e vice-versa. Assim, dizemos que o cubo é dual do octaedro (e vice-versa), que o dodecaedro é dual do icosaedro (e vice-versa) e que o tetraedro é dual de si próprio, ou autodual. Note-se que se unirmos os pontos centrais dos pares de faces adjacentes de um cubo obtemos também um octaedro. Os dois octaedros são semelhantes, pois existem dilações com centro no centro do cubo que transformam qualquer deles no outro. Qual deles é o dual do cubo? A pergunta não tem sentido, pois o conceito de dualidade não se aplica a poliedros concretos mas a classes de poliedros. O que podemos dizer é que o dual do cubo (entendendo a palavra cubo como a classe de todos os cubos) é o octaedro (entendendo por octaedro a classe de todos os octaedros). Portanto os dois métodos que apresentámos para encontrar "o dual" servem para encontrar representantes do poliedro dual.

A mesma construção a partir dos planos tangentes, no caso dos arquimedianos, leva-nos aos poliedros duais destes, os chamados *sólidos de Catalan*. As faces não são polígonos regulares, mas são todas congruentes. Na figura 29 está representado um dos sólidos de Catalan, o dual do cuboctaedro. As faces são 12 losangos e por isso se chama *dodecaedro rômbico*.

Relacionados com os poliedros duais, aparecem os *sólidos compostos*. Podem também resultar de estrelações. Por exemplo, da estrelação do octaedro surge a *stella octangula*, que encontrámos no início do cap. III. Trata-se de um sólido composto de dois tetraedros, portanto pode também considerar-se como composto de um poliedro e do seu dual, numa posição especial. Podemos da mesma forma considerar o sólido composto de um octaedro e do seu dual (o cubo), obtido colocando as arestas do cubo concorrentes com as do octaedro e perpendiculares no ponto médio. A figura 30 mostra esse sólido composto.

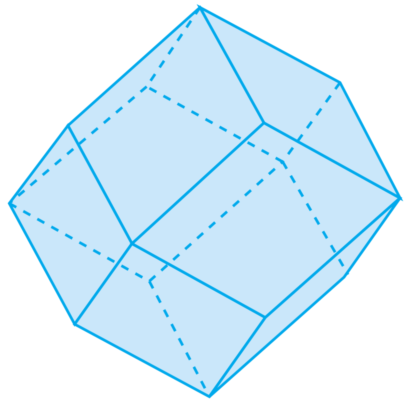


Figura 29. Dodecaedro rômbico, dual do cuboctaedro.

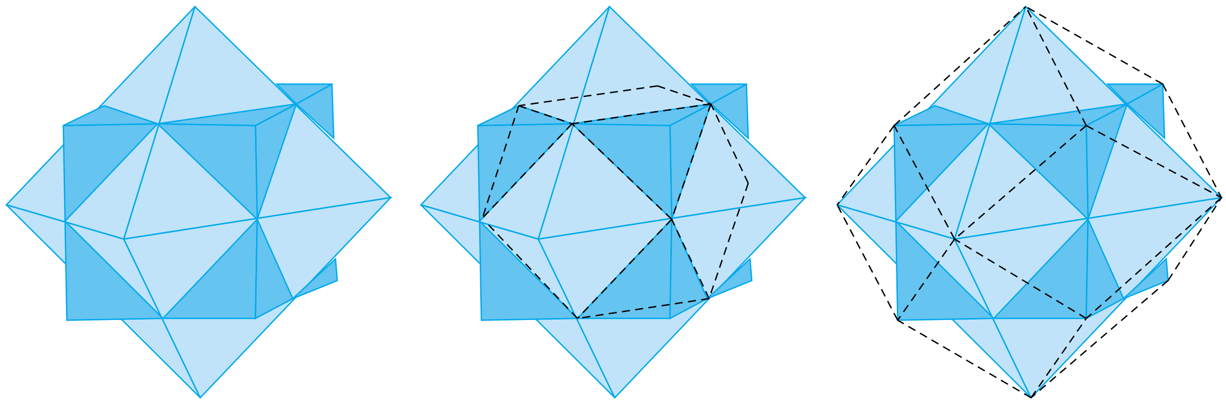


Figura 30. À esquerda está o sólido composto do octaedro e do cubo, seu dual. Na figura do meio, vemos como a intersecção do octaedro e do cubo, nesta posição, tem como resultado o cuboctaedro. Na figura da direita vemos como o sólido envolvente do sólido composto é o dodecaedro rômbico, dual do cuboctaedro.

Como estrelações do icosaedro podem obter-se vários sólidos compostos, como por exemplo o composto de 5 tetraedros (fig. 31). O sólido comum a estes 5 tetraedros é um icosaedro.

Por outro lado, o sólido envolvente dos 5 tetraedros é um dodecaedro, do qual apenas indicámos na figura, a tracejado, o contorno de uma das faces.

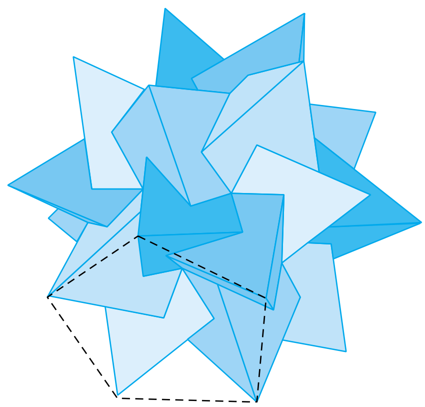


Figura 31. Estrelação do icosaedro dando origem a um sólido composto por 5 tetraedros.

Poliedros no séc. XX. Deltaedros.

Durante o século XX os poliedros continuaram a merecer a atenção dos matemáticos. O geómetra canadiano Coxeter alarga ainda mais o conceito de regularidade, admitindo polígonos não planos e com um número infinito de lados, estuda exaustivamente as estrelações do icosaedro, e publica a obra fundamental *Regular Polytopes*. Neste livro, os poliedros em espaços de dimensões maiores do que 3 são estudados sistematicamente.

Começa a ser estudada uma questão que em princípio deveria ter merecido a atenção dos matemáticos há mais tempo: quantos poliedros convexos, em que as faces são polígonos convexos regulares, existem? Em 1960 Norman Johnson conjectura que existem 92, além dos platónicos e dos arquimedianos, incluindo os prismas e antiprismas regulares. Nove anos depois, a conjectura é demonstrada por Johnson, Grünbaum e Zalgaller.[23]

Entretanto um resultado parcial tinha sido demonstrado em 1947 por Freudenthal e por van der Waerden: existem ao todo 8 poliedros convexos cujas faces são triângulos equiláteros.[24] Num livro publicado quatro anos depois Cundy e Rollett propõem o nome de *deltaedros* para esta família de poliedros.[25]

Dos oito deltaedros, três são bem conhecidos: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. Além disso, dois tetraedros unidos por uma face formam uma bipirâmide triangular — que é um deltaedro —, e se unirmos pela base duas pirâmides pentagonais cujas faces sejam triângulos equiláteros obtemos mais um deltaedro. Os três restantes têm respectivamente 12, 14 e 16 faces. Os últimos cinco estão representados na figura 32.

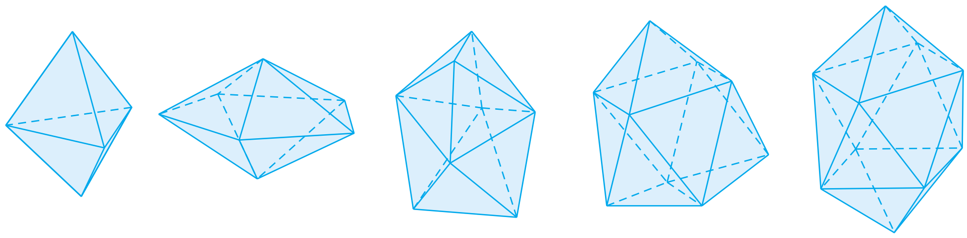


Figura 32

Note-se que os deltaedros têm uma sequência de faces iguais a 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 20. *Deveria* portanto existir um deltaedro com 18 faces... Se contarmos os vértices e as arestas, existe a mesma lacuna que deveria ser preenchida pelo tal deltaedro que falta. Mas Freudenthal e van der Waerden provaram que esse tetraedo não existe.

NOTAS

[1] Ver nota 6, pág. 54.

[2] Victor Katz, *History of Mathematics, An Introduction*. Esta História da Matemática, recente e muito completa, que inclui muita informação sobre matemática não europeia, é geralmente considerada uma das melhores disponíveis neste momento.

[3] O papiro de Moscovo, contém, como o de Rhind, uma colecção de problemas. De acordo com V. Katz, obra citada, foi comprado em 1893 por V. S. Golenishchev e vendido posteriormente ao Museu de Belas Artes de Moscovo.

[4] V. Katz, obra citada, pág. 3.

[5] Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, págs. 327 a 329.

[6] Esta tradução faz parte de uma publicação em preparação (na Associação de Professores de Matemática) sobre Poliedros, resultado de um conjunto de trabalhos sobre este tema escritos por professores participantes num Curso de Especialização realizado em 1993 no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. A tradução estava incluída num dos dois trabalhos sobre sólidos platónicos, da autoria de Maria Helena Cunha, Maria Irene Moreira, Maria Irene Segurado e Maria Manuel Marques. Os restantes trabalhos a integrar nessa publicação são: *Sólidos Platónicos* (Fernanda Coelho, M. Julieta Silva, Teresa Aragão), *Poliedros Arquimedianos* (Fernanda Cunha, Mª Antonieta Raposo, Mª Dina Rego de Almeida, Mª Fátima P. de Almeida), *A Família dos Deltaedros* (Mª Rosário Almeida, Mª Teresa Lopes, Raquel Escórcio), *Prismas e Antiprismas e seus Duais* (Ilda Lopes, Maria Fernanda Carvalho), *Os Poliedros de Kepler-Poinsot e outros Poliedros e Sólidos Estrelados* (Helena Maria Paradinha, Maria José Boia, Maria Romana Reis) e *Poliedros que Preenchem o Espaço* (Ana Vieira, Fátima Santos, Liseta Santos, Margarida Oliveira). Parte da inspiração do autor para escrever o presente texto sobre poliedros resulta desse óptimo conjunto de trabalhos, que se espera venham a ser publicados no futuro.

[7] Heath, *Elements*, vol. XIII, pág. 507.

[8] O livro em castelhano *El Mundo de los Poliedros*, de Gregoria Guillén Soler, publicado na colecção Matematicas: Cultura y Aprendizaje, é muito completo e pode servir de livro base para o estudo dos poliedros.

[9] Ver Gregoria Soler, obra citada, págs. 126 e 127.

[10] No que diz respeito ao nome *snub* e à sua tradução portuguesa, foi Kepler quem atribuiu nomes aos poliedros arquimedianos, em particular o nome de "simus" (a palavra latina, de origem grega, para nariz achatado) a estes dois arquimedianos. A palavra *snub* deriva do termo latino (em inglês *snub nose* significa nariz achatado) Parece portanto apropriado designar os dois sólidos por cubo achatado e dodecaedro achatado. (informação fornecida por John Fauvel)

[11] Reproduzida a partir do livro *The Science of Art,* de Martin Kemp.

[12] Kemp, obra citada, pág. 54. O livro de Kemp trata longamente das relações entre Dürer e a geometria, e descreve em detalhe o conteúdo do tratado de Dürer *Underweyssung der messung*.

[13] Ver "Milestones in the History of Polyhedra", uma contribuição de Malkevitch para o livro organizado por Senechal e Fleck, *Shaping Space, a polyhedral approach*. Este texto de Malkevitch contém dados importantes sobre a história dos poliedros, e foi seguido de perto nesta "história da geometria".

[14] Existem dois livros que podem apoiar a construção destes sólidos, se o leitor está decidido a fazê-lo. Trata-se de *Mathematical Models*, de Cundy e Rollet, e *Polyhedral Models*, de Wenninger. A reprodução do grande icosaedro, na figura 26, é tirada do livro de Cundy, pois é de mais difícil compreensão a uma cor.

[15] H. M. S. Coxeter é um dos maiores geómetras do séc. XX, e grande impulsionador do estudo da geometria, em particular dos poliedros. De origem canadiana, e ainda vivo (em 1997), é autor de numerosos livros de geometria, entre os quais *Introduction to Geometry* e *Regular Polytopes*, sendo o primeiro um tratado muito completo, abordando praticamente todos os temas principais da geometria, e o segundo um estudo exaustivo dos poliedros regulares de dimensão 3 e superior a 3 (os chamados *politopes*).

[16] Kappraff, *Connections*, págs. 273 a 275.

[17] O leitor interessado em conhecer esta história não deve deixar de ler o livro de Imre Lakatos, *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*. Trata-se de um livro importante e controverso que expõe, de modo brilhante, as ideias de Lakatos sobre a natureza da descoberta e criação matemáticas, opostas à concepção da matemática como acumulação pacífica de verdades estabelecidas. A primeira parte do livro passa-se numa aula de ficção, em que sucessivas tentativas de demonstração da fórmula de Euler são tentadas pelo professor e refutadas pelos alunos, num paralelo com a própria história verdadeira, contada em notas de rodapé.

[18] Ver Lakatos, obra citada, pág. 7, nota 2.

[19] Idem

[20] Idem, pág.8.

[21] Ver texto referido na nota 13 anterior.

[22] Texto de Grünbaum e Shephard, "Duality of Polyhedra", in Senechal e Fleck, *Shaping Space, a polyhedral approach* .

[23] Malkevitch, texto referido na nota 13.

[24] Idem.

[25] Cundy, obra citada.

BIOGRAFIAS BREVES

Catalan, Eugène Charles (1814-1894). Matemático belga, foi professor de geometria descritiva na École Polytechnique, de onde tinha sido expulso como aluno anos antes, devido ás suas ideias políticas de extrema esquerda. Trabalhou em fracções contínuas e em teoria dos números. Como se refere no texto, estudou os duais dos poliedros arquimedianos, agora chamados sólidos de Catalan.

Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857). Matemático francês conhecido pelos seus trabalhos em análise (séries infinitas, equações diferenciais), teoria das permutações, probabilidades e física matemática. Demonstrou, para um caso particular de poliedros, a fórmula de Euler, e que o número máximo de poliedros regulares é nove. Mantendo péssimas relações com os seus colegas cientistas, são célebres os seus erros de apreciação dos trabalhos de Galois e de Abel.

Euclides (c. 365 - c 300 a.C.). Pouco se sabe sobre Euclides, excepto o facto de ter ensinado em Alexandria, no Egipto. É conhecido pelos *Elementos* e por outros livros desaparecidos na sua maior parte. Parte dos *Elementos* foram publicados em português em 1855, na Universidade de Coimbra, a partir da edição latina de Frederico Commandino, e estão disponíveis na Internet em edição digital, no endereço http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html.

Eudóxio (c.408 - 355 a.C.). Estudou medicina na ilha de Cnido, junto da Ásia Menor, onde nasceu. Em Atenas, frequentou a Academia de Platão, e estudou filosofia e matemática. Segundo V. Katz (*History of Mathematics, An Introduction*) é a Eudóxio que se deve ter tornado a astronomia uma disciplina matemática, através da utilização da geometria esférica.

Euler, Leonhard (1707-1783). Tendo nascido na Suiça, Euler viveu e trabalhou durante muitos anos na Rússia, em S. Petersburgo, e depois em Berlim, na Academia das Ciências, durante vinte e cinco anos, e de novo na Rússia, onde morreu com 76 anos. Euler tem trabalhos importantes em muitas áreas da matemática, como a geometria, a análise e a teoria dos números. Tendo cegado praticamente aos 31 anos, continuou a trabalhar até ao fim da vida, tendo sido o mais produtivo matemático da sua época.

Gergonne, Joseph Diaz (1771-1859). Oficial de artilharia e professor de matemática francês, dedicou-se à geometria projectiva, onde introduziu o princípio da dualidade. Apresentou uma solução engenhosa para o problema das circunferências tangentes de Apolónio (ver cap. II, pág. 95).

Kepler, Johannes (1571-1630). Kepler é sobretudo conhecido pela sua descoberta de que as órbitas dos planetas são elipses e pelas três leis sobre o movimento dos planetas, resultados publicados nas suas obras *Astronomia Nova* (1609) e *Harmonices Mundi* (1619). São também importantes os seus trabalhos em geometria, nomeadamente em relação aos poliedros estrelados e de Kepler-Poinsot.

Pacioli, Luca (1445-1517). Frade franciscano, publicou em 1494 a *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Proporcionalita* em dialecto toscano, livro que, segundo Victor Katz, não contém descobertas originais mas teve imensa influência devido à sua expansão, pelo facto de ter sido um dos primeiros textos matemáticos a ser impressos.

Poinsot, Louis (1777-1859). Matemático francês, Poinsot estudou na École Polytechnique e trabalhou no Bureau des Longitudes. Em 1809 escreveu um trabalho importante sobre poliedros, descobrindo, independentemente de Kepler, os quatro poliedros estrelados que, juntamente com os cinco platónicos, constituem os nove poliedros regulares.

Teeteto (c. 415-c. 369 a.C.). Teeteto nasceu em Atenas e trabalhou em matemática na Academia de Platão. Parece dever-se a ele a identificação e as propriedades de pelo menos parte (octaedro e icosaedro) dos poliedros platónicos, e de parte do conteúdo do vol. XIII dos *Elementos* de Euclides.

von Staudt, Carl Georg Christian (1798-1867). Matemático alemão, publicou diversos trabalhos sobre geometria projectiva.