[Exercícios 1, 2,3 e 4 retirados do Manual Escolar Máximo das páginas 10 a 14]
[Exercícios 5 e 6 retirados da aula digital: *Operações com números complexos*]

1. Na sua obra *Ars Magna*, Girolamo Cardano apresentou **a fórmula resolvente para equações do 3.º grau** que permite obter uma solução real de uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q.
Para Cardano, dada a equação na incógnita x, $x^3 + px + q = 0,\ \ p, q \in \mathbb{R}$, tem-se que, sendo o discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positivo ou nulo, o número real $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ é raiz da equação dada.
O matemático Bombelli aplicou esta fórmula à equação: $x^3 - 15x - 4 = 0$.
Considera a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

i) Mostra, por substituição, que 4 é solução da equação dada.

Resolução:

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$$

ii) Utilizando a fórmula de Cardano, mostra sucessivamente que:

(1) $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -11^2$

Resolução:
p=-15 e q=-4

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27} = 4 - 125 = -121 = -11^2$$

(2) $x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$

Resolução:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

p=-15 e q=-4

D=-11^2

Substituir os valores de p, q e D na raiz da equação:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{-11^2}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{-11^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

[Exercícios 1, 2,3 e 4 retirados do Manual Escolar Máximo das páginas 10 a 14]
[Exercícios 5 e 6 retirados da aula digital: *Operações com números complexos*]

(3) $(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm 11\sqrt{-1}$, considerando $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

Resolução:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = (3 + 4\sqrt{-1})(2 + \sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$(2 - \sqrt{-1})^3 = \left(3 - 4\sqrt{-1}\right)\left(2 - \sqrt{-1}\right) = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Então: $(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm 11\sqrt{-1}$

(4) $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 4$

Resolução:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3}$$
$$= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

2. Mostra que o elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$ é (0,0).

Resolução:
$(0{,}0) + (a, b) = (a, b) + (0{,}0) = (a, b), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

3. Mostra que o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$ é (1,0).

Resolução:
$$(1{,}0) \times (a, b) = (a, b) \times (1{,}0) = (a, b), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

4. Prova a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição, ou seja, prova que: Dados $(a, b), (c, d), (e, f) \epsilon \mathbb{R}^2$,
$$(a, b) \times [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) \times (c, d)] + [(a, b) \times (e, f)].$$

Resolução:
$$\begin{aligned}(a, b) \times [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) \times (c + e, d + f) \\ &= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = \\ &= [(a, b) \times (c, d)] + [(a, b) \times (e, f)]\end{aligned}$$

[Exercícios 1, 2,3 e 4 retirados do Manual Escolar Máximo das páginas 10 a 14]
[Exercícios 5 e 6 retirados da aula digital: *Operações com números complexos*]

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -\frac{1}{2} + i$.

   Seleciona a opção correta.

   (i) $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2} + i$

   (ii) $z_1 \times z_2 = -\frac{7}{2} + i$

   (iii) $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2} + 4i$

   (iv) $z_1 \times z_2 = -\frac{7}{2} + 4i$

Resolução:

$$z_1 \times z_2 = (3-2i) \times \left(-\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{3}{2} + 3 + -i + 2 = \frac{1}{2} + 4i$$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z = -1 + 3i$ e $w = 2 + ai$, $a \in \mathbb{R}$.
   Sabe-se que $z \times w = -17 + i$.
   Seleciona a opção correta.

   (a) $a = \frac{1}{3}$
   (b) $a = 3$
   (c) $a = -5$
   (d) $a = 5$

Resolução:

$$z \times w = (-1 + 3i) \times (2 + ai) = -2 - ai + 6i - 3a = (-2 - 3a) + (6 - a)i$$

(6-a)=1 ⇔a=5
(-2-3a)=-17 ⇔ -3a=-15 ⇔ a=5