

## Plano de Aula

<b>Disciplina:</b> Matemática A <b>Turma:</b> 10º Ano	<b>Tema:</b> Geometria Analítica no Plano <b>Subtema:</b> Circunferências	<b>Duração:</b> 100 minutos
--	--	--------------------------------

### Conteúdos:

- Equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano;
- Resolução de problemas envolvendo equações cartesianas de circunferências.

### Objetivos:

O aluno deve ser capaz de:

- Recordar a fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano;
- Identificar a equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Escrever a equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Representar uma circunferência no plano ortonormado, dada a sua equação cartesiana reduzida;
- Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano;
- Resolver problemas envolvendo equações cartesianas de circunferências.

### Material:

- Caderno diário;
- Quadro e respetivo material de escrita;
- Projetor;
- Raposo D., Gomes L. *Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1*, Edições ASA;
- Raposo D., Gomes L. *Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Caderno de Exercícios e Testes*, Edições ASA;
- Simulador Geogebra - Circunferências (disponibilizado na Aula Digital Leya).

### Sumário:

- Geometria Analítica no Plano: circunferências (introdução);
- Simulação Geogebra sobre circunferências;
- Resolução de exercícios (individualmente e em grupo).

### Estrutura das Sessões:

Estrutura	Tempo Previsto	Metodologia
Introdução	( $\approx$ 5')	- Criar um ambiente de ensino-aprendizagem positivo; - Preparar o material necessário durante a aula.

	(≈ 5')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Introduzir o tema e subtema da aula;</li> <li>- Apresentar o sumário.</li> </ul>								
	(≈ 5')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Recordar a fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano (vista em aulas anteriores);</li> <li>- Discutir com os alunos acerca da quantidade de pontos que estão à mesma distância de um certo ponto fixo e acerca do lugar geométrico que é a circunferência. Este processo tem por objetivo motivar os alunos a descobrir a equação cartesiana reduzida da circunferência.</li> </ul>								
<b>Desenvolvimento</b>	(≈ 25')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Considerar um ponto e uma distância fixos, à escolha dos alunos, e determinar a equação que define todos os pontos que estão à distância dada do ponto fixo, identificando-a como a equação cartesiana reduzida da circunferência (fazer acompanhar este raciocínio de desenhos); (*)</li> <li>- Apresentar a equação cartesiana reduzida da circunferência para centros e distâncias arbitrárias;</li> <li>- Mostrar no simulador Geogebra, disponibilizado na Aula Digital da Leya, de que forma varia a representação gráfica da circunferência em relação à sua equação cartesiana reduzida.</li> </ul>								
	(≈ 15')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Deixar os alunos resolver o exercício 16 - a) - i. e 16 - a) - iii. e corrigi-los (<i>Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 170</i>);</li> <li>- Resolver com os alunos o exercício 16 - b) - iii., interpretando o resultado (<i>Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 170</i>).</li> </ul>								
	(≈ 15')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Retomar a equação cartesiana reduzida da circunferência utilizada em (*) e desenvolvê-la ao máximo, mostrando que a equação cartesiana da circunferência nem sempre se encontra na forma reduzida;</li> <li>- Mostrar a técnica do "Completamento do Binómio", obtendo de novo a equação cartesiana reduzida da circunferência;</li> </ul>								
	(≈ 25')	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Agrupar os alunos em 3 grupos para que possam resolver em conjunto os exercícios propostos da seguinte maneira:</li> </ul> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Grupo 1</th> <th>Grupo 2</th> <th>Grupo 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Exercícios: 17 - a) e 17 - d)</td> <td>Exercícios: 17 - b) e 17 - e)</td> <td>Exercícios: 17 - c) e 17 - f)</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;"><i>Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 172</i></td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Corrigir os exercícios e interpretar os resultados;</li> </ul>	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Exercícios: 17 - a) e 17 - d)	Exercícios: 17 - b) e 17 - e)	Exercícios: 17 - c) e 17 - f)	<i>Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 172</i>	
Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3								
Exercícios: 17 - a) e 17 - d)	Exercícios: 17 - b) e 17 - e)	Exercícios: 17 - c) e 17 - f)								
<i>Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 172</i>										

	(Opcional) Entre 5' a 20'	- Caso haja tempo resolver alguns dos seguintes exercícios ( <i>Expoente</i> <sup>10</sup> - <i>Matemática A - Volume 1</i> ): <ul style="list-style-type: none"> <li>• Página 183 - Exercício 7;</li> <li>• Página 184 - Exercício 12.</li> </ul>
<b>Conclusão</b>	(≈ 5')	- Fazer uma revisão dos conhecimentos adquiridos e concluir a aula.

**Avaliação:** Observação dos comportamentos dos alunos para avaliação da componente das Atitudes.

**Trabalho de Reforço Individual:** (Opcional)

- *Expoente*<sup>10</sup> - *Matemática A - Volume 1*
  - Página 182 - Exercício 4;
  - Página 183 - Exercício 7;
  - Página 184 - Exercício 12;
  - Página 185 - Exercício 18;
  - Página 189 - Exercício 33.
- *Caderno de Exercícios e Testes*
  - Página 16 - Exercício 3.

**Bibliografia:**

- Bivar A., Grosso C., Oliveira F., Timóteo M. C., Loura L. *Programa e Metas Curriculares – Matemática A – Ensino Secundário - Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*;
- Propostas de Resolução do Manual (disponibilizado na Aula Digital Leya);
- Raposo D., Gomes L. *Expoente*<sup>10</sup> - *Matemática A - Volume 1*, Edições ASA (disponibilizado na Aula Digital Leya);
- Simulador Geogebra - Circunferências (disponibilizado na Aula Digital Leya).

**Anotações:**

## Anexo (Exercícios da Aula)

Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 170 & 172

**16** Considera os pontos do plano  $A(2, 3)$ ,  $B(0, 5)$  e  $C(-1, 4)$ .

a) Determina uma equação da circunferência:

i. de centro  $A$  e raio  $\overline{BC}$ ;

ii. de centro  $B$  e a passar em  $A$ ;

iii. de centro  $C$  e tangente ao eixo das abcissas.

b) Averigua se o ponto  $P(1, 2)$  pertence a alguma das circunferências definidas nas alíneas anteriores.

**17** Indica o centro e o raio das circunferências definidas por cada uma das seguintes condições.

a)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

b)  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2$

c)  $x^2 + y^2 = 1$

d)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

e)  $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 16 = 0$

f)  $x^2 + y^2 + y - \frac{1}{4} = 0$

**16.**  $A(2, 3)$        $B(0, 5)$        $C(-1, 4)$

a)

i.  $\overline{BC} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Assim, uma equação da circunferência de centro  $A$  e raio  $\overline{BC}$  é  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ .

iii. Se a circunferência tem centro em  $C$  e é tangente ao eixo das abcissas, então o seu raio vai ser a distância entre  $C$  e o eixo das abcissas, que é 4.

Assim, uma equação da circunferência de centro  $C$  e que é tangente ao eixo das abcissas é  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$ .

b)  $P(1, 2)$

Substituindo em cada uma das circunferências da alínea anterior  $x$  e  $y$  pela abcissa e pela ordenada de  $P$ , obtemos:

iii.  $(1 + 1)^2 + (2 - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow 2^2 + (-2)^2 = 16 \Leftrightarrow 4 + 4 = 16 \Leftrightarrow 8 = 16$ , que é uma proposição falsa. Logo,  $P$  não pertence à circunferência de centro  $C$  e que é tangente ao eixo das abcissas.

17.

a)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Centro (1, 2)

Raio =  $\sqrt{9} = 3$

b)  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2$

Centro  $\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$

Raio =  $\sqrt{2}$

c)  $x^2 + y^2 = 1$

Centro (0, 0)

Raio =  $\sqrt{1} = 1$

d)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 1 + 4$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Centro (1, 2)

Raio =  $\sqrt{9} = 3$

e)  $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -8 + 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

Centro (-2, 3)

Raio =  $\sqrt{5}$

f)  $x^2 + y^2 + y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Centro  $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Raio =  $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

---

*Expoente<sup>10</sup> - Matemática A - Volume 1 - Página 183 & 184*

**7** Num plano munido de um referencial cartesiano, a interseção da circunferência de equação  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$  com a reta definida por  $x = -1$  é:

(A) um ponto.

(B) dois pontos.

(C) o conjunto vazio.

(D) um segmento de reta.

Resposta: B)

**12** Num plano munido de um referencial cartesiano, a condição  $x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0$  representa:

(A) o conjunto vazio.

(B) um ponto.

(C) uma circunferência.

(D) uma elipse.

Resposta: B)